Klausur Statistik (7.5 ECTS)

Name		**Prüfer**	Prof. Dr. I. Klein
Vorname		**Arbeitszeit**	Donnerstag, 02.03.2017
Matrikelnummer			14:00 - 16:00 Uhr
Studienrichtung		**Sitzplatznummer**	
Semesterzahl		**Raum**	
Email (optional)			

Hinweis: Aufgabenblätter nicht auseinandertrennen!

Ergebnis:

Statistik	
Aufgabe	**Punkte**
1	
2	
3	
4	
Summe	
Note:	

Unterschrift des Kandidaten: ____________________

Unterschrift des Prüfers: ____________________

Hilfsmittel: Es gelten folgende Regelungen zu den erlaubten Hilfsmitteln:

- Nicht programmierbarer Taschenrechner
- Die vom Lehrstuhl seit dem WS 2014/15 offiziell herausgegebene Formelsammlung (DIN A5, gebunden, orangener Umschlag). Es sind prinzipiell keine weiteren Eintragungen oder Markierungen darin erlaubt. Ausgenommen sind farbliche Hinterlegungen von Textpassagen und/oder Formeln. Außerdem ist das Erratum zur 1. Auflage der Formelsammlung erlaubt.
- R Reference Card von Jonathan Baron, es sind keine weiteren Eintragungen oder Markierungen darin erlaubt.

Bewertung: Für jede Aufgabe werden maximal zehn Punkte vergeben. Bewertet werden grundsätzlich nur Lösungen, die im Lösungsteil stehen und für die Folgendes beachtet wird:

- Der Lösungsweg muss aus einer Darstellung der einzelnen Rechenschritte ersichtlich sein.
- Antworten sind stets zu begründen, es sei denn es wird ausdrücklich keine Begründung verlangt.
- Unleserliche Aufgabenteile werden mit 0 Punkten bewertet.

Viel Erfolg!

Aufgabe 1 von 4

Ein Kreditinstitut verlangt von einem Kreditnehmer über einen fünfjährigen Zeithorizont folgende nominale Zinssätze pro Jahr:

Jahr i	1	2	3	4	5
Zins X_i	2.1%	3.1%	2.5%	4.7%	1.5%

1. Bestimmen Sie den durchschnittlichen Zinssatz mit Hilfe des geometrischen Mittels.

2. Welcher Betrag an Zinsen muss insgesamt entrichtet werden, wenn die Kreditsumme 10000 Euro beträgt und zum Ende jedes Jahres jeweils 2000 Euro getilgt werden?

Die Anzahl der täglich neu abgeschlossenen Kreditverträge N des Instituts folge folgender Verteilung:

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$P(N = n)$	0.03	0.05	0.14	0.32	0.21	0.12	0.06	0.04	0.02	θ

3. Wie muss θ gewählt sein, damit eine Wahrscheinlichkeitsfunktion vorliegt?

4. Berechnen Sie den Erwartungswert $E[N]$.

Wenn Sie den Erwartungswert nicht bestimmen konnten, verwenden Sie im Folgenden den Wert $E[N]^* = 3.3$.

5. Die Varianz $\text{Var}(N)$ beträgt 12.44. Berechnen Sie das zweite Moment $E[N^2]$.

Für 19 ausgefallene Kreditnehmer liegen Beobachtungen über die Höhe des jeweils eingetreten Verlusts V [in Mio Euro] vor.

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
v_i	0.2	0.3	0.4	0.4	0.6	0.7	0.8	0.9	0.9	1.0

i	11	12	13	14	15	16	17	18	19
v_i	1.0	1.0	1.1	1.5	1.7	2.2	2.9	3.1	17.2

Eine wichtige Maßzahl für die Quantifizierung finanzieller Risiken ist der so genannte Value-at-Risk VaR_α. Dieser ist definiert als das α-Quantil der Verteilung der Verluste.

6. Berechnen Sie den $VaR_{0.8}$ als empirisches Quantil aus den obigen Daten.

Wenn Sie den Value-at-Risk nicht bestimmen können, verwenden Sie im Folgenden den Wert $VaR^*_{0.8} = 1.1$.

Eine weitere wichtige Maßzahl ist der Expected Shortfall ES_α. Dieser ist definiert als der bedingte Erwartungswert bei dem der Verlust den zugehörigen Value-at-Risk annimmt oder überschreitet: $ES_\alpha = \mathbb{E}(V|V \geq VaR_\alpha)$.

7. Berechnen Sie den Expected Shortfall $ES_{0.8}$ als arithmetisches Mittel der Daten, die den Wert $VaR_{0.8}$ annehmen oder überschreiten.

In dem Kreditinstitut werden Kreditnehmer bezüglich ihrer Bonität in Ratingklassen A (gut), B (schlecht) und D (default - ausgefallen) eingeteilt, wobei sich die Bonitätseinschätzung im Lauf der Zeit ändern kann. Die folgende Tabelle zeigt bedingte Wahrscheinlichkeiten $P(R_{t+1}|R_t)$ für die Veränderungen des Ratings R eines einzelnen Kreditnehmers innerhalb eines Ein-Jahres-Zeithorizonts $[t, t+1)$. Die Veränderungen sollen dabei unabhängig vom konkreten Zeitpunkt t als konstant angenommen werden.

		$t+1$		
		A	B	D
t	A	0.65	0.31	0.04
	B	0.24	0.61	0.15
	D	0	0	1

8. Welches maximal zulässige Skalenniveau besitzt das Merkmal “Zeitdauer bis zu einer Veränderung des Ratings eines Kreditnehmers”?

9. Berechnen Sie die Gini-Entropie für die möglichen Zustände des Ratings eines Kreditnehmers zum Zeitpunkt $t+1$, wenn er zum Zeitpunkt t mit Ratingkategorie A bewertet ist.

10. Wie müsste die Tabelle angepasst werden, damit die Gini-Entropie aus der vorherigen Teilaufgabe ihren Maximalwert erreicht.

11. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit $P(R_2 = D|R_0 = A)$, d.h. dass ein Kreditnehmer im Laufe des Zwei-Jahres-Zeitraums $[0, 2)$ aus Ratingkategorie A ausfällt?

Schmierpapier zu Aufgabe 1

Aufgabe 2 von 4

Sie sind Qualitätsprüfer bei der Firma „Bonnes herbes“, welche Kräuterbonbons produziert. Sei

X : „Anzahl der Kräuterbonbons in einer Tüte”.

Um eine Qualitätskontrolle durchzuführen, ziehen Sie die nachfolgende einfache Zufallsstichprobe:

Tüte i	1	2	3	4	5	6	7	8	9
x_i	26	28	29	32	30	27	29	28	33

Gehen Sie von einer normalverteilten Grundgesamtheit mit Mittelwert μ_X und Varianz σ_X^2 aus.

1. Geben Sie den Schätzer für μ_X nach der Methode der Momente an und berechnen Sie den Schätzwert.

2. Sie vermuten, dass ihre Produktionsmaschine im Mittel weniger als 30 Bonbons in eine Tüte füllt. Um Ihre Vermutung bei einer Irrtumswahrscheinlichkeit von 5% zu testen, stellen Sie die folgende Null- und Alternativhypothese auf:

$$H_0 : \mu_X \geq \mu_0 = 30, \qquad H_1 : \mu_X < \mu_0 = 30.$$

(a) Geben Sie die Prüfgröße und deren theoretische Verteilung an, und berechnen Sie den Wert der realisierten Prüfgröße. Nutzen Sie $s^2_{X,9} = 4.50$.
(Hinweis: Sollten Sie in Teilaufgabe 1. keine Lösung erhalten haben, nutzen Sie $\bar{x}_9 = 29.90$.)

(b) Geben Sie den Wert der kritischen Schranke an.

(c) Gehen Sie nun von einer realisierten Prüfgröße $t_9 = -0.95$ und einer kritischen Schranke von -2.5 aus. Treffen Sie eine Testentscheidung und begründen Sie diese.

Eine Qualitätsprüfung bei der Firma „Bonnes herbes“ hat folgendes ergeben:
Eine manuelle Qualitätskontrolle deckt einen Mangel mit einer Wahrscheinlichkeit von 90% auf. Wird hingegen keine manuelle Kontrolle durchgeführt kann ein Mangel nur mit einer Wahrscheinlichkeit von 30% entdeckt werden. Eine manuelle Kontrolle wird mit einer Wahrscheinlichkeit von 20% durchgeführt.

3. Berechnen Sie die nachfolgenden Wahrscheinlichkeiten. Verwenden Sie:

   E : „Ein Mangel wird entdeckt”

   M : „Eine manuelle Kontrolle wird durchgeführt”.

   (a) $P(\bar{M})$

   (b) $P(E \cap M)$

(c) $P(\bar{E} \cap M)$

4. Sind die Ereignisse E und M stochastisch unabhängig (mit Begründung)? Nutzen Sie $P(E) = 0.36$.

Betrachten Sie die folgenden drei Zufallsvariablen Z, Y und B:

$$Y \sim N(\mu_Y, \sigma_Y^2),$$
$$Z \sim N(\mu_Z, \sigma_Z^2),$$
$$B \sim N(0, 1).$$

5. Zwei einfache Zufallsstichproben von Y und Z liefern die folgenden Ergebnisse:

$$n = 100, \qquad \overline{yz} = 145.53, \qquad \bar{y} = 11.88, \qquad \bar{z} = 12.25.$$

Berechnen Sie die Stichprobenkovarianz.

6. Geben Sie die Verteilung der nachfolgenden Zufallsvariablen an:

   (a) $K = \frac{Y - \mu_Y}{\sigma_Y}$

   (b) $J = \sum_{i=1}^{20} K$

   (c) $H = B^2$

Schmierpapier zu Aufgabe 2

Aufgabe 3 von 4

Eine Verkehrsgesellschaft will zum nächsten Monat die Preise für die Personenbeförderung erhöhen. Das Kundencenter der Gesellschaft rechnet an den Tagen nach der Presseerklärung vermehrt mit Beschwerdemails, weshalb die Anzahl an Mitarbeitern an diesen Tagen erhöht werden soll. Sei

X : „Anzahl der eingehenden Beschwerdemails in einer Minute"

mit $X \sim Pois(\lambda)$, $\lambda > 0$. Gehen Sie davon aus, dass die Annahmen des Poisson-Prozesses erfüllt sind.

1. Um die benötigte Anzahl an zusätzlichem Personal bestimmen zu können, wurde die Anzahl eingehender Beschwerdemails pro Minute in den ersten 10 Minuten nach der letzten Preiserhöhung betrachtet:

Minute i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
X_i	6	2	8	1	5	0	3	4	1	0

(a) Zeigen Sie, dass die logarithmierte Likelihood Funktion der Poisson-Verteilung folgende Form hat:

$$LL(\lambda; X_1, ..., X_n) = -\lambda \cdot n + ln(\lambda) \cdot \sum_{i=1}^{n} X_i - \sum_{i=1}^{n} ln\,(X_i!)$$

(b) Zeigen Sie, dass der Maximum-Likelihood-Schätzer für λ gerade $\widehat{\lambda}_{ML} = \overline{X}_n$ ist und bestimmen Sie den zugehörigen Schätzwert. Gehen Sie davon aus, dass die hinreichenden Bedingungen für ein Maximum erfüllt sind.

2. Schätzen Sie die in 5 Minuten erwartete Anzahl von Beschwerdemails (sollten Sie bei Teilaufgabe 1(b) kein Ergebnis erhalten haben, so verwenden Sie $\widehat{\lambda}_{ML} = 2$).

Nehmen Sie an, der wahre Parameter sei $\lambda = 3$.

3. Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass

   (a) in einer Minute mindestens zwei aber weniger als 5 Beschwerdemails eingehen,

   (b) in der 20. Minute keine und in der 21. Minute genau 5 Beschwerdemails eingehen.

4. Bestimmen Sie den Median der theoretischen Verteilung von X.

Nach dem ersten Tag möchte die Finanzabteilung der Verkehrsgesellschaft die zusätzlichen Mitarbeiter wieder abziehen, da sie vermutet, dass im Schnitt pro Minute weniger als eine Beschwerdemail eintrifft. Daher stellt sie die Hypothesen

$$H_0: \ \lambda \geq 1 = \lambda_0 \quad \text{vs.} \quad H_1: \ \lambda < 1$$

auf und möchte diese anhand der ersten 10 Minuten des ersten Tages nach der Preiserhöhung mit Hilfe eines **exakten** Hypothesentests überprüfen. Sei $\sum_{i=1}^{10} x_i = 14$.

5. Berechnen Sie die realisierte Prüfgröße.

Sie wissen, dass die Prüfgröße T Poisson-verteilt ist mit Parameter $n \cdot \lambda_0$.

6. Berechnen Sie den p-Wert. (Sollten Sie in Teilaufgabe 6 kein Ergebnis erhalten haben, verwenden Sie im Weiteren $t_{10} = 15$).

7. Bestimmen Sie das realisierte rechtsseitige approximative 96%-Konfidenzintervall für λ.

8. Treffen Sie eine Testentscheidung auf dem 96%-Konfidenzniveau und begründen Sie Ihre Antwort. (Falls Sie in den vorangegangen Teilaufgaben kein Ergebnis erhalten haben, verwenden Sie einen p-Wert von 0.4).

9. Wie ist die „Wartezeit zwischen dem Eingang zweier Beschwerdemails” verteilt?

Schmierpapier zu Aufgabe 3

Aufgabe 4 von 4

Sie betrachten den Vergütungsstahl 25CrMo4 mit einer Zugfestigkeit von 700 Megapascal (MPa). Die Zugfestigkeit gibt die maximale mechanische Zugspannung bis zum Materialversagen an.

1. Welchen Merkmalstyp hat das Merkmal „Zugfestigkeit in MPa“?

Von Ihrem Lieferanten fordern Sie Prüfkörper des Vergütungsstahls 25CrMo4 an. Für eine Stichprobe im Umfang von 10 Prüfkörpern ermitteln Sie die Zugfestigkeit.

Prüfkörper i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Zugfestigkeit in MPa	702	695	699	699	703	701	680	678	705	702

2. Bearbeiten Sie nachstehende Teilaufgaben:

   a) Ermitteln Sie den Modus oder die Modi.

   b) Ermitteln Sie die Spannweite.

   c) Ermitteln Sie den Quartilsabstand.

d) Welchen Wert würden Sie aus der Stichprobe ausschließen, um die Stichproben-Varianz maximal reduzieren zu können (ohne Rechnung)?

3. Betrachten Sie die normalverteilte Zufallsvariable Z: „Zugfestigkeit eines Prüfkörpers aus 25CrMo4 [in MPa]". Sie testen bei einer Irrtumswahrscheinlichkeit $\alpha = 5\%$ die Vermutung, dass die Varianz der Zugfestigkeit kleiner ist als 100. Dafür betrachten Sie diesmal eine Zufallsstichprobe aus 101 Prüfkörpern mit einer Stichprobenvarianz von $S^2_{101} = 121$. Sie stellen folgende Hypothesen auf:

$$H_0 : \sigma^2 \geq \sigma_0^2 = 100 \qquad \text{gegen} \qquad H_1 : \sigma^2 < \sigma_0^2 = 100$$

a) Bestimmen Sie die realisierte Prüfgröße.

b) Ermitteln Sie die kritische Schranke.

c) **Arbeiten Sie jetzt mit einem p-Wert von 0.95**. Treffen Sie die Testentscheidung und begründen Sie diese.

4. Sie nutzen den Stahl zur Herstellung von Turbinen. Beantworten Sie folgende Fragen:

   a) Die Turbine vom Typ A fällt im Betrieb aus, falls einer der beiden Fehler F_1 oder F_2 auftritt. Es sei $P(F_1) = 0.01$, $P(F_2) = 0.02$ sowie $P(F_1 \cup F_2) = 0.027$. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass F_1 und F_2 gemeinsam auftreten?

   b) Nehmen Sie nun an, die Fehlerwahrscheinlichkeit p für einen Ausfall pro Turbineneinsatz sei $p = 0.015$. Jeder Turbineneinsatz ist von allen anderen Turbineneinsätzen unabhängig. Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass bei 100 Einsätzen kein Fehler auftritt?

5. Bearbeiten Sie folgende Teilaufgaben zu Verteilungen und ihren Charakteristika:

   a) Welche Verteilung weist eine minimale Streuung von Null auf?

   b) Nennen Sie eine Verteilung, für die weder Mittelwert noch Varianz existieren.

   c) Welchen Wert nimmt die Kurtosis der Normalverteilung an?

d) Bestimmen Sie a so, dass es sich bei $f(x) = a\sin(x)$ auf dem Intervall von 0 bis $\pi/2$ um eine Dichte handelt. Hinweise:

- $\int \sin(x)\,\mathrm{d}x = -\cos(x) + c$
- $\cos(0) = 1, \quad \sin(0) = 0, \quad \sin(\pi/2) = 1, \quad \cos(\pi/2) = 0$

e) Betrachten Sie nun die standardnormalverteilte Zufallsvariable X. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass X den Wert π annimmt?

Schmierpapier zu Aufgabe 4

Lösung Klausur WiSe 2016/17 (7.5 ECTS)

Lösung 1

1.) $\bar{x}_{\text{geom}} = (1.021 \cdot 1.031 \cdot 1.025 \cdot 1.047 \cdot 1.015)^{\frac{1}{5}} = 1.0277 \Rightarrow \bar{z} = 2.77\%$ (1P)

2.) $10000 \cdot 0.021 + 8000 \cdot 0.031 + 6000 \cdot 0.025 + 4000 \cdot 0.047 + 2000 \cdot 0.015$
$= 826[EUR]$ (1P)

3.) $\sum_{n=0}^{9} P(N=n) \stackrel{!}{=} 1 \Leftrightarrow \theta = 0.01$ (1P)

4.) $E(N) = \sum_{n=0}^{9} n \cdot P(N=n) = 3.62$ (0.5P)
5.) $Var(N) = E(N^2) - E(N)^2 \Leftrightarrow E(N^2) = Var(N) + E(N)^2 = 12.44 + 3.62^2 = 25.5444$
Mit Ersatzergebnis: $E(N^2) = 23.33$ (1P)

6.) $\widehat{VaR}_{0.8} = \min\{v|F_n(v) \geq 0.8\} = 2.2$ (1P)

7.) $\widehat{ES}_{0.8} = E(V|V \geq 2.2) = \frac{1}{4}\sum_{i=16}^{19} v_i = 6.35$
Mit Ersatzergebnis: $ES_{0.8} = 4.2429$ (1P)

8.) Verhältnisskala (0.5P)

9.) $\mathbb{P}(R_{t+1} = A|R_t = A) = \mathbb{P}(R_{t+1} = B|R_t = A) = \mathbb{P}(R_{t+1} = D|R_t = A) = \frac{1}{3}$ (1P)

10.) $H_2(p) = 1 - \sum_{i=1}^{3} p_i^2 = 1 - (0.65^2 + 0.31^2 + 0.04^2) = 0.4798$ (1P)

11.)

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(R_2 = D|R_0 = A) &= \mathbb{P}(R_2 = D|R_1 = A)\mathbb{P}(R_1 = A|R_0 = A) \\
&+ \mathbb{P}(R_2 = D|R_1 = B)\mathbb{P}(R_1 = B|R_0 = A) \\
&+ \mathbb{P}(R_2 = D|R_1 = D)\mathbb{P}(R_1 = D|R_0 = A) \\
&= 0.04 \cdot 0.65 + 0.15 \cdot 0.31 + 1 \cdot 0.04 = 0.1125
\end{aligned}$$

(1P)

Lösung 2

1)
- $\hat{\mu}_X^{MM} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$
- $\hat{\mu}_X^{MM} = 29.1111$

2.a)
- $T_n = \sqrt{n}\frac{\bar{X}_n - \mu}{S_{X,n}} \sim t(n-1)$
- $t_9 = -1.2571$
  (Ersatzlösung: $t_9 = \sqrt{9}\frac{29{,}90-30}{\sqrt{4.50}} = -0.1414$)

2.b) $-t_{0.95,8} = -1.860$

2.c)
- $-0.95 > -2.5$
- Die Nullhypothese kann bei einer Irrtumswahrscheinlichkeit von 5% nicht abgelehnt werden.

3.a) $P(\bar{M}) = 1 - P(M) = 1 - 0.2 = 0.8$

3.b) $P(E \cap M) = 0.18$

3.c) $P(\bar{E} \cap M) = 0.02$

4)
- E und M sind nicht stochastisch unabhängig
- Eine der folgenden Varianten:
  $P(E|M) = 0.9 \neq P(E) = 0.36$ oder
  $P(E \cap M) = 0.18 \neq P(E) \cdot P(M) = 0.36 \cdot 0.2 = 0.072$

5) $s_{xy} = 0$

6)
a) $K \sim N(0,1)$
b) $J \sim N(0,400)$
c) $H \sim \chi^2(1)$

Lösung 3

1. (a) Log-Likelihood-Funktion:

$$\begin{aligned} LL(\lambda; X_1, ..., X_n) &= \log\left(\prod_{i=1}^{n} f_X(X_i;\lambda)\right) = \log\left(\prod_{i=1}^{n} e^{-\lambda}\frac{\lambda^{X_i}}{X_i!}\right) \\ &= \sum_{i=1}^{n}\left(\log e^{-\lambda} + \log \lambda^{X_i} - \log X_i!\right) \\ &= \sum_{i=1}^{n} -\lambda + \sum_{i=1}^{n}\log\lambda^{X_i} - \sum_{i=1}^{n}\log X_i! \\ &= -n\lambda + \log(\lambda)\sum_{i=1}^{n} X_i - \sum_{i=1}^{n}\log X_i! \end{aligned}$$

(1.5P)

   (b) $\frac{\partial}{\partial\lambda}LL = -n + \frac{\sum X_i}{\lambda} \overset{!}{=} 0 \Leftrightarrow \widehat{\lambda}_{ML} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$ (1P)

   $\widehat{\lambda}_{ML} = 3$ (0.5P)

2. $E[X] = 3$ erwartete Mails pro Minute $\Rightarrow 3 \cdot 5 = 15$ Mails in 5 Minuten (0.5P)

3. (a) $P(2 \leq X < 5) = F_X(4) - F_X(1) = 0.8153 - 0.1991 = 0.6162$ (1P)

   (b) $P(X_{20} = 0, X_{21} = 4) = P(X = 0) \cdot P(X = 5) = 0.0498 \cdot 0.1008 = 0.0050$ (1P)

4. $x_{med} = \min\{x | F_X(x) \geq 0.5\} = 3$ (0.5P)

5. $t = 14$ (0.5P)

6. $p = P(T \leq t) = P(T \leq 14) = 0.9165$ (1P)

7. $[\bar{x}_{10} - \lambda_{0.96}\sqrt{\frac{\bar{x}_{10}}{10}}; \infty) = [1.4 - 1.7507\sqrt{0.14}; \infty) = [0.7449; \infty)$ (1P)

8. H_0 nicht ablehnen für $\alpha = 4\%$, da $p > \alpha$ oder $\lambda_0 = 1$ im Konfidenzintervall. (1P)

9. Exponentialverteilt (0.5P)

Lösung 4

1. quantitativ — 0.5 P
2. a) 699 und 702 — 0.5 P+0.5 P
   b) 27 — 0.5 P
   c) 7 — 0.5 P+0.5 P
   d) 678 — 0.5 P
3. a) 121 — 0.5 P
   b) 77.9 — 0.5 P
   c) p-Wert $= 0.95 > \alpha = 0.05$, H_0 nicht ablehnen bei $\alpha = 0.05$ — 0.5 P+0.5 P
4. a) 0.003 — 0.5 P+0.5 P
   b) 0.2206 — 0.5 P
5. a) Einpunktverteilung — 0.5 P
   b) Cauchy-Verteilung bzw. t-Verteilung mit 1 Freiheitsgrad — 0.5 P
   c) 3 — 0.5 P
   d) 1 — 0.5 P+0.5 P
   e) 0 — 0.5 P

Klausur Statistik (10 ECTS)

Name		**Prüfer**	Prof. Dr. I. Klein
Vorname		**Arbeitszeit**	Donnerstag, 02.03.2017
Matrikelnummer			14:00 - 16:00 Uhr
Studienrichtung		**Sitzplatznummer**	
Semesterzahl		**Raum**	
Email (optional)			

Hinweis: Aufgabenblätter nicht auseinandertrennen!

Ergebnis:

Statistik	
Aufgabe	**Punkte**
1	
2	
3	
4	
Summe	
Note:	

Unterschrift des Kandidaten:____________________

Unterschrift des Prüfers:____________________

Hilfsmittel: Es gelten folgende Regelungen zu den erlaubten Hilfsmitteln:

- Nicht programmierbarer Taschenrechner
- Die vom Lehrstuhl seit dem WS 2014/15 offiziell herausgegebene Formelsammlung (DIN A5, gebunden, orangener Umschlag). Es sind prinzipiell keine weiteren Eintragungen oder Markierungen darin erlaubt. Ausgenommen sind farbliche Hinterlegungen von Textpassagen und/oder Formeln. Außerdem ist das Erratum zur 1. Auflage der Formelsammlung erlaubt.
- R Reference Card von Jonathan Baron, es sind keine weiteren Eintragungen oder Markierungen darin erlaubt.

Bewertung: Für jede Aufgabe werden maximal zehn Punkte vergeben. Bewertet werden grundsätzlich nur Lösungen, die im Lösungsteil stehen und für die Folgendes beachtet wird:

- Der Lösungsweg muss aus einer Darstellung der einzelnen Rechenschritte ersichtlich sein.
- Antworten sind stets zu begründen, es sei denn es wird ausdrücklich keine Begründung verlangt.
- Unleserliche Aufgabenteile werden mit 0 Punkten bewertet.

Viel Erfolg!

Aufgabe 1 von 4

Ein Kreditinstitut verlangt von einem Kreditnehmer über einen fünfjährigen Zeithorizont folgende nominale Zinssätze pro Jahr:

Jahr i	1	2	3	4	5
Zins X_i	2.1%	3.1%	2.5%	4.7%	1.5%

1. Bestimmen Sie den durchschnittlichen Zinssatz mit Hilfe des geometrischen Mittels.

2. Welcher Betrag an Zinsen muss insgesamt entrichtet werden, wenn die Kreditsumme 10000 Euro beträgt und zum Ende jedes Jahres jeweils 2000 Euro getilgt werden?

Die Anzahl der täglich neu abgeschlossenen Kreditverträge N des Instituts folge folgender Verteilung:

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$P(N = n)$	0.03	0.05	0.14	0.32	0.21	0.12	0.06	0.04	0.02	θ

3. Wie muss θ gewählt sein, damit eine Wahrscheinlichkeitsfunktion vorliegt?

4. Berechnen Sie den Erwartungswert $E[N]$.

Wenn Sie den Erwartungswert nicht bestimmen konnten, verwenden Sie im Folgenden den Wert $E[N]^* = 3.3$.

5. Die Varianz $\text{Var}(N)$ beträgt 12.44. Berechnen Sie das zweite Moment $E[N^2]$.

Für 19 ausgefallene Kreditnehmer liegen Beobachtungen über die Höhe des jeweils eingetreten Verlusts V [in Mio Euro] vor.

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
v_i	0.2	0.3	0.4	0.4	0.6	0.7	0.8	0.9	0.9	1.0

i	11	12	13	14	15	16	17	18	19
v_i	1.0	1.0	1.1	1.5	1.7	2.2	2.9	3.1	17.2

Eine wichtige Maßzahl für die Quantifizierung finanzieller Risiken ist der so genannte Value-at-Risk VaR_α. Dieser ist definiert als das α-Quantil der Verteilung der Verluste.

6. Berechnen Sie den $VaR_{0.8}$ als empirisches Quantil aus den obigen Daten.

Wenn Sie den Value-at-Risk nicht bestimmen können, verwenden Sie im Folgenden den Wert $VaR^*_{0.8} = 1.1$.

Eine weitere wichtige Maßzahl ist der Expected Shortfall ES_α. Dieser ist definiert als der bedingte Erwartungswert bei dem der Verlust den zugehörigen Value-at-Risk annimmt oder überschreitet: $ES_\alpha = \mathbb{E}(V|V \geq VaR_\alpha)$.

7. Berechnen Sie den Expected Shortfall $ES_{0.8}$ als arithmetisches Mittel der Daten, die den Wert $VaR_{0.8}$ annehmen oder überschreiten.

In dem Kreditinstitut werden Kreditnehmer bezüglich ihrer Bonität in Ratingklassen A (gut), B (schlecht) und D (default - ausgefallen) eingeteilt, wobei sich die Bonitätseinschätzung im Lauf der Zeit ändern kann. Die folgende Tabelle zeigt bedingte Wahrscheinlichkeiten $P(R_{t+1}|R_t)$ für die Veränderungen des Ratings R eines einzelnen Kreditnehmers innerhalb eines Ein-Jahres-Zeithorizonts $[t, t+1)$. Die Veränderungen sollen dabei unabhängig vom konkreten Zeitpunkt t als konstant angenommen werden.

		$t+1$		
		A	B	D
t	A	0.65	0.31	0.04
	B	0.24	0.61	0.15
	D	0	0	1

8. Welches maximal zulässige Skalenniveau besitzt das Merkmal “Zeitdauer bis zu einer Veränderung des Ratings eines Kreditnehmers”?

9. Berechnen Sie die Gini-Entropie für die möglichen Zustände des Ratings eines Kreditnehmers zum Zeitpunkt $t+1$, wenn er zum Zeitpunkt t mit Ratingkategorie A bewertet ist.

10. Wie müsste die Tabelle angepasst werden, damit die Gini-Entropie aus der vorherigen Teilaufgabe ihren Maximalwert erreicht.

11. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit $P(R_2 = D|R_0 = A)$, d.h. dass ein Kreditnehmer im Laufe des Zwei-Jahres-Zeitraums $[0, 2)$ aus Ratingkategorie A ausfällt?

Schmierpapier zu Aufgabe 1

Aufgabe 2 von 4

Sie sind Qualitätsprüfer bei der Firma „Bonnes herbes“, welche Kräuterbonbons produziert. Sei

X : „Anzahl der Kräuterbonbons in einer Tüte”.

Um eine Qualitätskontrolle durchzuführen, ziehen Sie die nachfolgende einfache Zufallsstichprobe:

Tüte i	1	2	3	4	5	6	7	8	9
x_i	26	28	29	32	30	27	29	28	33

Gehen Sie von einer normalverteilten Grundgesamtheit mit Mittelwert μ_X und Varianz σ_X^2 aus.

1. Geben Sie den Schätzer für μ_X nach der Methode der Momente an und berechnen Sie den Schätzwert.

2. Sie vermuten, dass ihre Produktionsmaschine im Mittel weniger als 30 Bonbons in eine Tüte füllt. Um Ihre Vermutung bei einer Irrtumswahrscheinlichkeit von 5% zu testen, stellen Sie die folgende Null- und Alternativhypothese auf:

$$H_0 : \mu_X \geq \mu_0 = 30, \qquad H_1 : \mu_X < \mu_0 = 30.$$

(a) Geben Sie die Prüfgröße und deren theoretische Verteilung an, und berechnen Sie den Wert der realisierten Prüfgröße. Nutzen Sie $s^2_{X,9} = 4.50$.
(Hinweis: Sollten Sie in Teilaufgabe 1. keine Lösung erhalten haben, nutzen Sie $\bar{x}_9 = 29.90$.)

(b) Geben Sie den Wert der kritischen Schranke an.

(c) Gehen Sie nun von einer realisierten Prüfgröße $t_9 = -0.95$ und einer kritischen Schranke von -2.5 aus. Treffen Sie eine Testentscheidung und begründen Sie diese.

Eine Qualitätsprüfung bei der Firma „Bonnes herbes“ hat folgendes ergeben:
Eine manuelle Qualitätskontrolle deckt einen Mangel mit einer Wahrscheinlichkeit von 90% auf. Wird hingegen keine manuelle Kontrolle durchgeführt kann ein Mangel nur mit einer Wahrscheinlichkeit von 30% entdeckt werden. Eine manuelle Kontrolle wird mit einer Wahrscheinlichkeit von 20% durchgeführt.

3. Berechnen Sie die nachfolgenden Wahrscheinlichkeiten. Verwenden Sie:

   E : „Ein Mangel wird entdeckt”

   M : „Eine manuelle Kontrolle wird durchgeführt”.

   (a) $P(\bar{M})$

   (b) $P(E \cap M)$

(c) $P(\bar{E} \cap M)$

4. Sind die Ereignisse E und M stochastisch unabhängig (mit Begründung)? Nutzen Sie $P(E) = 0.36$.

Betrachten Sie die folgenden drei Zufallsvariablen Z, Y und B:

$$Y \sim N(\mu_Y, \sigma_Y^2),$$
$$Z \sim N(\mu_Z, \sigma_Z^2),$$
$$B \sim N(0, 1).$$

5. Zwei einfache Zufallsstichproben von Y und Z liefern die folgenden Ergebnisse:

$$n = 100, \qquad \overline{yz} = 145.53, \qquad \bar{y} = 11.88, \qquad \bar{z} = 12.25.$$

Berechnen Sie die Stichprobenkovarianz.

6. Geben Sie die Verteilung der nachfolgenden Zufallsvariablen an:

   (a) $K = \frac{Y - \mu_Y}{\sigma_Y}$

   (b) $J = \sum_{i=1}^{20} K$

   (c) $H = B^2$

Schmierpapier zu Aufgabe 2

Aufgabe 3 von 4

Eine Verkehrsgesellschaft will zum nächsten Monat die Preise für die Personenbeförderung erhöhen. Das Kundencenter der Gesellschaft rechnet an den Tagen nach der Presseerklärung vermehrt mit Beschwerdemails, weshalb die Anzahl an Mitarbeitern an diesen Tagen erhöht werden soll. Sei

X : „Anzahl der eingehenden Beschwerdemails in einer Minute”

mit $X \sim Pois(\lambda)$, $\lambda > 0$. Gehen Sie davon aus, dass die Annahmen des Poisson-Prozesses erfüllt sind.

1. Um die benötigte Anzahl an zusätzlichem Personal bestimmen zu können, wurde die Anzahl eingehender Beschwerdemails pro Minute in den ersten 10 Minuten nach der letzten Preiserhöhung betrachtet:

Minute i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
X_i	6	2	8	1	5	0	3	4	1	0

(a) Zeigen Sie, dass die logarithmierte Likelihood Funktion der Poisson-Verteilung folgende Form hat:

$$LL(\lambda; X_1, ..., X_n) = -\lambda \cdot n + ln(\lambda) \cdot \sum_{i=1}^{n} X_i - \sum_{i=1}^{n} ln\,(X_i!)$$

(b) Zeigen Sie, dass der Maximum-Likelihood-Schätzer für λ gerade $\widehat{\lambda}_{ML} = \overline{X}_n$ ist und bestimmen Sie den zugehörigen Schätzwert. Gehen Sie davon aus, dass die hinreichenden Bedingungen für ein Maximum erfüllt sind.

2. Schätzen Sie die in 5 Minuten erwartete Anzahl von Beschwerdemails (sollten Sie bei Teilaufgabe 1(b) kein Ergebnis erhalten haben, so verwenden Sie $\widehat{\lambda}_{ML} = 2$).

Nehmen Sie an, der wahre Parameter sei $\lambda = 3$.

3. Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass

   (a) in einer Minute mindestens zwei aber weniger als 5 Beschwerdemails eingehen,

   (b) in der 20. Minute keine und in der 21. Minute genau 5 Beschwerdemails eingehen.

4. Bestimmen Sie den Median der theoretischen Verteilung von X.

Nach dem ersten Tag möchte die Finanzabteilung der Verkehrsgesellschaft die zusätzlichen Mitarbeiter wieder abziehen, da sie vermutet, dass im Schnitt pro Minute weniger als eine Beschwerdemail eintrifft. Daher stellt sie die Hypothesen

$$H_0: \ \lambda \geq 1 = \lambda_0 \quad \text{vs.} \quad H_1: \ \lambda < 1$$

auf und möchte diese anhand der ersten 10 Minuten des ersten Tages nach der Preiserhöhung mit Hilfe eines **exakten** Hypothesentests überprüfen. Sei $\sum_{i=1}^{10} x_i = 14$.

5. Berechnen Sie die realisierte Prüfgröße.

Sie wissen, dass die Prüfgröße T Poisson-verteilt ist mit Parameter $n \cdot \lambda_0$.

6. Berechnen Sie den p-Wert. (Sollten Sie in Teilaufgabe 6 kein Ergebnis erhalten haben, verwenden Sie im Weiteren $t_{10} = 15$).

7. Bestimmen Sie das realisierte rechtsseitige approximative 96%-Konfidenzintervall für λ.

8. Treffen Sie eine Testentscheidung auf dem 96%-Konfidenzniveau und begründen Sie Ihre Antwort. (Falls Sie in den vorangegangen Teilaufgaben kein Ergebnis erhalten haben, verwenden Sie einen p-Wert von 0.4).

9. Wie ist die „Wartezeit zwischen dem Eingang zweier Beschwerdemails" verteilt?

Schmierpapier zu Aufgabe 3

Aufgabe 4 von 4

In Ihrem Workspace liegt ein bereits erstellter Dataframe `data.sp500`, welcher den täglich Kursverlauf des S&P 500 im Jahr 2016 beinhaltet.[1] Der Dataframe enthält folgende Merkmale:

Ausprägung Merkmal	**Spaltenname**
Schlusskurs:	`Close`
Eröffnungskurs:	`Open`
Niedrigster Kurs:	`Low`
Höchster Kurs:	`High`
Handelsvolumen:	`Volume`

Arbeiten Sie zunächst mit folgendem `R`-Output:

```
'data.sp500':        255 obs. of  5 variables:
 $ Close :  num  2012.66 2016.71 1990.26 1943.09 1922.03 1923.67 ...
 $ Open  :  num  2038.20 2013.78 2011.71 1985.32 1945.97 1926.12 ...
 $ Low   :  num  1989.68 2004.17 1979.05 1938.83 1918.46 1901.10 ...
 $ High  :  num  2038.20 2021.94 2011.71 1985.32 1960.40 1935.65 ...
 $ Volume:  num  4304880000 3706620000 4336660000 5076590000 ...
```

1. Geben Sie den `R`-Befehl an, mit dem Sie die Anzahl der Tage mit einem Eröffnungskurs über 2000 erhalten.

2. Welche Outputwerte liefert der Befehl `data.sp500$Low[seq(2,5,2)]`?

[1] https://de.finance.yahoo.com

Folgender R-Code wird nun in die Konsole eingegeben:

```
> a <- data.sp500$Close-mean(data.sp500$Close)
> b <- mean(a^2)
> c <- mean(a^3/sqrt(b)^3)
```

3. Welche statistischen Kennzahlen beschreiben die Variablen b und c in obigen Befehl?

Im Folgenden steht Ihnen in R der Data Frame `data.dax30` zur Verfügung, welcher die täglichen Kurse des Jahres 2016 der Aktien Allianz SE (`all`), BASF SE (`bas`), BMW AG (`bmw`), RWE AG (`rwe`) und Siemens AG (`sie`) enthält.[2] Arbeiten Sie zunächst mit folgendem R-Output:

```
'data.dax30':        260 obs. of  5 variables:
 $ all:  num  140.66 141.11 141.56 138.63 136.87 137.41 ...
 $ bas:  num  64.86 64.50 63.42 61.88 61.12 60.71 61.73 ...
 $ bmw:  num  88.35 87.94 85.03 81.83 79.91 79.63 81.26 ...
 $ rwe:  num  10.45 10.67 10.72 10.43 10.22 10.51 10.59 ...
 $ sie:  num  82.23 82.74 82.42 80.84 80.28 79.76 80.23 ...
```

4. Geben Sie den R-Befehl an, mit dem Sie den Tag mit dem höchsten Kurs der Siemens Aktie angezeigt bekommen.

5. Nehmen Sie zur folgenden Aussage Stellung: Die prozentuale Kurssteigerung zwischen dem ersten und siebten Tag ist bei der RWE Aktie größer als bei der BASF Aktie. **Mit** Begründung!

[2] https://de.finance.yahoo.com

6. Mit welchem `R`-Code können Sie sich den Teildatensatz anzeigen lassen, der lediglich die Kurse der Aktien Allianz und BMW enthält?

7. Geben Sie den `R`-Befehl für das Erstellen eines logischen Vektors `darueber` an, der für jedes Element den Wert `TRUE` enthält, falls der Kurs der Siemens Aktie über dem der BMW Aktie liegt.

Aufgrund von Risikodiversifizierung wird im Folgenden ein Portfolio aus Aktien betrachtet. Die Zufallsvariable X beschreibt die Rendite von Aktie 1, wobei X den Erwartungswert $e1$ und Varianz $var1$ besitzt. Die Rendite von Aktie 2 wird durch die Zufallsvariable Y mit Erwartungswert $e2$ und Varianz $var2$ definiert. Die Korrelation zwischen den Zufallsvariablen X und Y ist mit cor gekenntzeichnet. Die Objekte `var1`, `var2` und `cor` liegen bereits als Objekte im Workspace vor. Die Varianz des Portfolios P ist definiert durch:

$$\mathrm{Var}(P) = a^2\mathrm{Var}(X) + (1-a)^2\mathrm{Var}(Y) + 2a(1-a)\mathrm{Cov}(\mathrm{X},\mathrm{Y}), \text{ wobei } a \in [0,1].$$

8. Geben Sie den `R`-Befehl an, mit dem Sie eine Funktion `var` implementieren, welche als Inputargumente $a, var1, var2, cor$ besitzt und die Varianz von P zurückgibt.

9. Geben Sie den `R`-Befehl an, mit dem Sie mittels der Funktion `nlm` die Varianzfunktion `var` bezüglich des Koeffizienten a minimieren. Wählen Sie geeignete Startwert(e).

Folgender `R`-Code wird nun in die Konsole eingegeben:

```
> j = 0
> for(i in 1:3){j = j + i}
```

10. Welchen Wert erhalten Sie für j?

11. Vervollständigen Sie folgenden `R`-Code, um nachstehende logarithmierte Likelihoodfunktion der Poissonverteilung in `R` zu berechnen:

$$\ln(L(\lambda; x_1, ..., x_n)) = \sum_{i=1}^{n} \ln f_{\text{pois}}(x_i; \lambda)$$

```
LL_pois = function(        ,data){
    sum(         (         (         ,         )         )         )
}
```

Schmierpapier zu Aufgabe 4

Lösung Klausur WiSe 2016/17 (10 ECTS)

Lösung 1

1.) $\bar{x}_{\text{geom}} = (1.021 \cdot 1.031 \cdot 1.025 \cdot 1.047 \cdot 1.015)^{\frac{1}{5}} = 1.0277 \Rightarrow \bar{z} = 2.77\%$ (1P)

2.) $10000 \cdot 0.021 + 8000 \cdot 0.031 + 6000 \cdot 0.025 + 4000 \cdot 0.047 + 2000 \cdot 0.015$
$= 826[EUR]$ (1P)

3.) $\sum_{n=0}^{9} P(N = n) \stackrel{!}{=} 1 \Leftrightarrow \theta = 0.01$ (1P)

4.) $E(N) = \sum_{n=0}^{9} n \cdot P(N = n) = 3.62$ (0.5P)
5.) $Var(N) = E(N^2) - E(N)^2 \Leftrightarrow E(N^2) = Var(N) + E(N)^2 = 12.44 + 3.62^2 = 25.5444$
Mit Ersatzergebnis: $E(N^2) = 23.33$ (1P)

6.) $\widehat{VaR}_{0.8} = \min\{v|F_n(v) \geq 0.8\} = 2.2$ (1P)

7.) $\widehat{ES}_{0.8} = E(V|V \geq 2.2) = \frac{1}{4} \sum_{i=16}^{19} v_i = 6.35$
Mit Ersatzergebnis: $ES_{0.8} = 4.2429$ (1P)

8.) Verhältnisskala (0.5P)

9.) $\mathbb{P}(R_{t+1} = A|R_t = A) = \mathbb{P}(R_{t+1} = B|R_t = A) = \mathbb{P}(R_{t+1} = D|R_t = A) = \frac{1}{3}$ (1P)

10.) $H_2(p) = 1 - \sum_{i=1}^{3} p_i^2 = 1 - (0.65^2 + 0.31^2 + 0.04^2) = 0.4798$ (1P)

11.)

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(R_2 = D|R_0 = A) &= \mathbb{P}(R_2 = D|R_1 = A)\mathbb{P}(R_1 = A|R_0 = A) \\
&+ \mathbb{P}(R_2 = D|R_1 = B)\mathbb{P}(R_1 = B|R_0 = A) \\
&+ \mathbb{P}(R_2 = D|R_1 = D)\mathbb{P}(R_1 = D|R_0 = A) \\
&= 0.04 \cdot 0.65 + 0.15 \cdot 0.31 + 1 \cdot 0.04 = 0.1125
\end{aligned}$$

(1P)

Lösung 2

1)
- $\hat{\mu}_X^{MM} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i$
- $\hat{\mu}_X^{MM} = 29.1111$

2.a)
- $T_n = \sqrt{n} \frac{\bar{X}_n - \mu}{S_{X,n}} \sim t(n-1)$
- $t_9 = -1.2571$
  (Ersatzlösung: $t_9 = \sqrt{9} \frac{29{,}90-30}{\sqrt{4.50}} = -0.1414$)

2.b) $-t_{0.95,8} = -1.860$

2.c)
- $-0.95 > -2.5$
- Die Nullhypothese kann bei einer Irrtumswahrscheinlichkeit von 5% nicht abgelehnt werden.

3.a) $P(\bar{M}) = 1 - P(M) = 1 - 0.2 = 0.8$

3.b) $P(E \cap M) = 0.18$

3.c) $P(\bar{E} \cap M) = 0.02$

4)
- E und M sind nicht stochastisch unabhängig
- Eine der folgenden Varianten:
  $P(E|M) = 0.9 \neq P(E) = 0.36$ oder
  $P(E \cap M) = 0.18 \neq P(E) \cdot P(M) = 0.36 \cdot 0.2 = 0.072$

5) $s_{xy} = 0$

6)
a) $K \sim N(0,1)$
b) $J \sim N(0,400)$
c) $H \sim \chi^2(1)$

Lösung 3

1. (a) Log-Likelihood-Funktion:

$$\begin{aligned} LL(\lambda; X_1, ..., X_n) &= \log\left(\prod_{i=1}^{n} f_X(X_i;\lambda)\right) = \log\left(\prod_{i=1}^{n} e^{-\lambda}\frac{\lambda^{X_i}}{X_i!}\right) \\ &= \sum_{i=1}^{n}\left(\log e^{-\lambda} + \log\lambda^{X_i} - \log X_i!\right) \\ &= \sum_{i=1}^{n} -\lambda + \sum_{i=1}^{n}\log\lambda^{X_i} - \sum_{i=1}^{n}\log X_i! \\ &= -n\lambda + \log(\lambda)\sum_{i=1}^{n} X_i - \sum_{i=1}^{n}\log X_i! \end{aligned}$$

(1.5P)

   (b) $\frac{\partial}{\partial\lambda} LL = -n + \frac{\sum X_i}{\lambda} \stackrel{!}{=} 0 \;\Leftrightarrow\; \widehat{\lambda}_{ML} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$ (1P)

   $\widehat{\lambda}_{ML} = 3$ (0.5P)

2. $E[X] = 3$ erwartete Mails pro Minute $\Rightarrow 3 \cdot 5 = 15$ Mails in 5 Minuten (0.5P)

3. (a) $P(2 \leq X < 5) = F_X(4) - F_X(1) = 0.8153 - 0.1991 = 0.6162$ (1P)

   (b) $P(X_{20} = 0, X_{21} = 4) = P(X = 0) \cdot P(X = 5) = 0.0498 \cdot 0.1008 = 0.0050$ (1P)

4. $x_{med} = \min\{x | F_X(x) \geq 0.5\} = 3$ (0.5P)

5. $t = 14$ (0.5P)

6. $p = P(T \leq t) = P(T \leq 14) = 0.9165$ (1P)

7. $[\bar{x}_{10} - \lambda_{0.96}\sqrt{\frac{\bar{x}_{10}}{10}}; \infty) = [1.4 - 1.7507\sqrt{0.14}; \infty) = [0.7449; \infty)$ (1P)

8. H_0 nicht ablehnen für $\alpha = 4\%$, da $p > \alpha$ oder $\lambda_0 = 1$ im Konfidenzintervall. (1P)

9. Exponentialverteilt (0.5P)

Lösung 4

1. `sum(data.sp500$Open>2000)` 0.5 P
2. 2004.17 1938.83 1.0 P
3. Varianz, Schiefe 1.0 P
4. `which(data.dax30$sie==max(data.dax30$sie))` 1.0 P
5. 0.01378676>-0.0483871 $\Rightarrow$ Wahr 1.0 P
6. `cbind(data.dax30$all,data.dax30$bmw)` 1.0 P
7. `darueber=data.dax30$sie>data.dax30$bmw` 1.0 P
8. `var=function(a,var1,var2,cor)`
   `{a^2*var1+(1-a)*var2+2*a*(1-a)*cor*sqrt(var1)*sqrt(var2)}` 1.0 P
9. `nlm(var,var1=var1,var2=var2,cov=cov,p=0.5)` 1.0 P
10. 6 0.5 P
11. `LL_pois=function(lambda,data){sum(log(dpois(data,lambda)))}` 1.0 P