

Klausur Statistik (7,5 ECTS)

Aufgaben und Lösung

Name		Prüfer	Prof. Dr. I. Klein
Vorname		Arbeitszeit	Mittwoch, 12.02.2014 14:00 – 16:00 Uhr
Matrikelnummer			
Studienrichtung		Sitzplatznummer	
Semesterzahl		Raum	
Email (optional)			

Hinweis: Aufgabenblätter nicht auseinandertrennen!

Ergebnis:

Statistik	
Aufgabe	Punkte
1	
2	
3	
4	
Summe	
Note:	

Unterschrift des Kandidaten: _____

Unterschrift des Prüfers: _____

Hilfsmittel:

Zugelassen sind eine selbsterstellte maximal vierseitige (DIN A4 doppelseitig) Formelsammlung, die vom Lehrstuhl zum Download bereitgestellte Tabellensammlung ohne Eintragungen und die R-Reference-Card (by Jonathan Baron) ohne Eintragungen.

Darüber hinaus sind Taschenrechner zugelassen. Es dürfen jedoch keine Programme oder Programmteile verwendet werden, die nicht fest in den Taschenrechner eingebaut sind. Alle Hilfsmittel sind selbst mitzubringen.

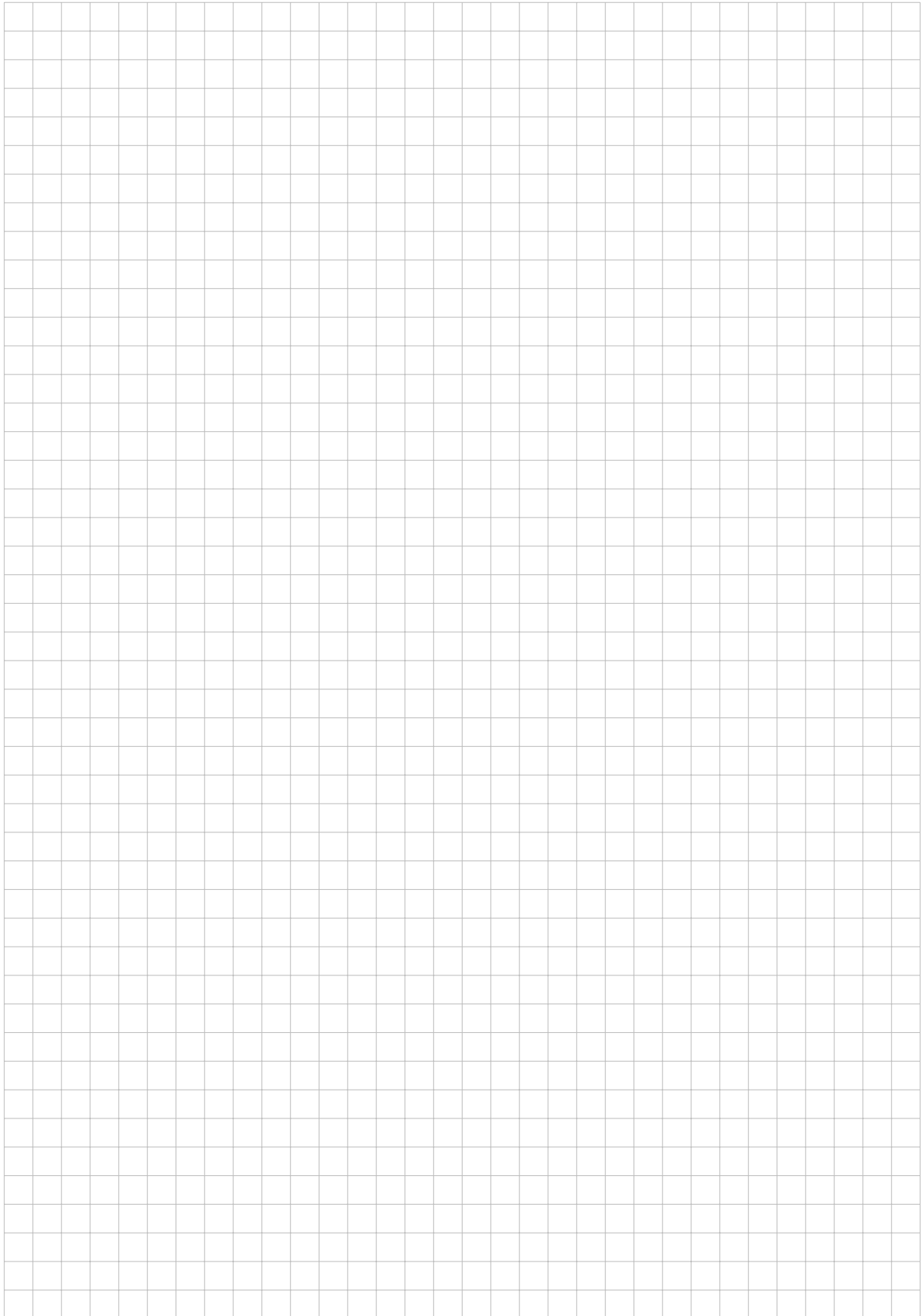
Bewertung:

Für jede Aufgabe werden maximal zehn Punkte vergeben. Bewertet werden grundsätzlich nur Lösungen, die im Lösungsteil stehen und für die folgendes beachtet wird:

- Der Lösungsweg muss aus einer Darstellung der einzelnen Rechenschritte ersichtlich sein.
- Antworten sind stets zu begründen, es sei denn es wird ausdrücklich keine Begründung verlangt.
- Unleserliche Aufgabenteile werden mit 0 Punkten bewertet.

Viel Erfolg!

Schmierpapier zu Aufgabe 1



In einem 1 km^2 großen Areal von Gemeinde G wurden die Blitzeinschläge der letzten 127 Jahre erfasst. Insgesamt schlugen in dieser Zeit $\sum_{i=1}^{127} x_i = 196$ Blitze ein.

3. Leiten Sie einen Schätzer für λ nach der Methode der Momente her und wenden Sie diesen auf die gegebene Stichprobe an. (Wenn Sie diese Aufgabe nicht lösen können, verwenden Sie im Folgenden den Wert 1.5.)



Testen Sie die Vermutung, dass $\lambda > 1.5$ ist. Hierzu formulieren Sie folgendes Hypothesenpaar:

$$H_0 : \lambda \leq \lambda_0 = 1.5 \quad \text{gegen} \quad H_1 : \lambda > \lambda_0.$$

Die hinreichend große Stichprobe erlaubt es Ihnen, den Test mittels approximativer Entscheidungsregel durchzuführen. Die dabei verwendete Testgröße ist approximativ standardnormalverteilt.

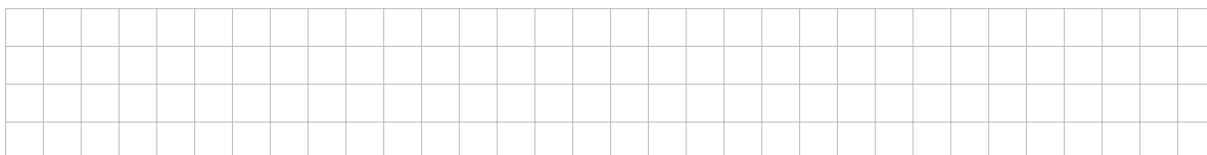
4. Berechnen Sie den Wert der realisierten Prüfgröße des approximativen Tests. (Wenn Sie diese Aufgabe nicht lösen können, verwenden Sie im Folgenden den Wert 0.4.)



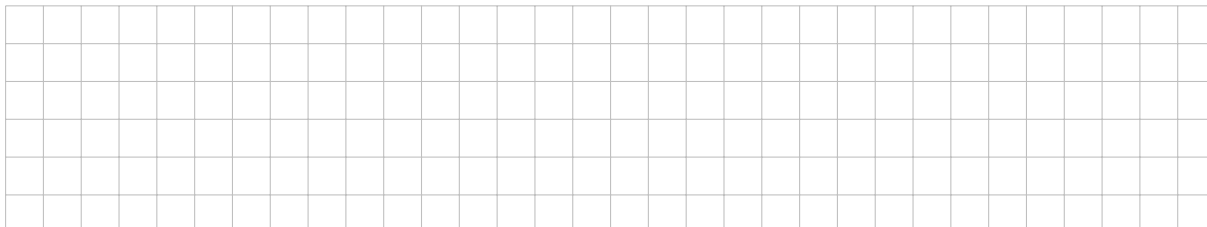
5. Berechnen Sie den approximativen p-Wert für den beschriebenen Hypothesentest. (Wenn Sie diese Aufgabe nicht lösen können, verwenden Sie im Folgenden einen p-Wert von 0.3.)



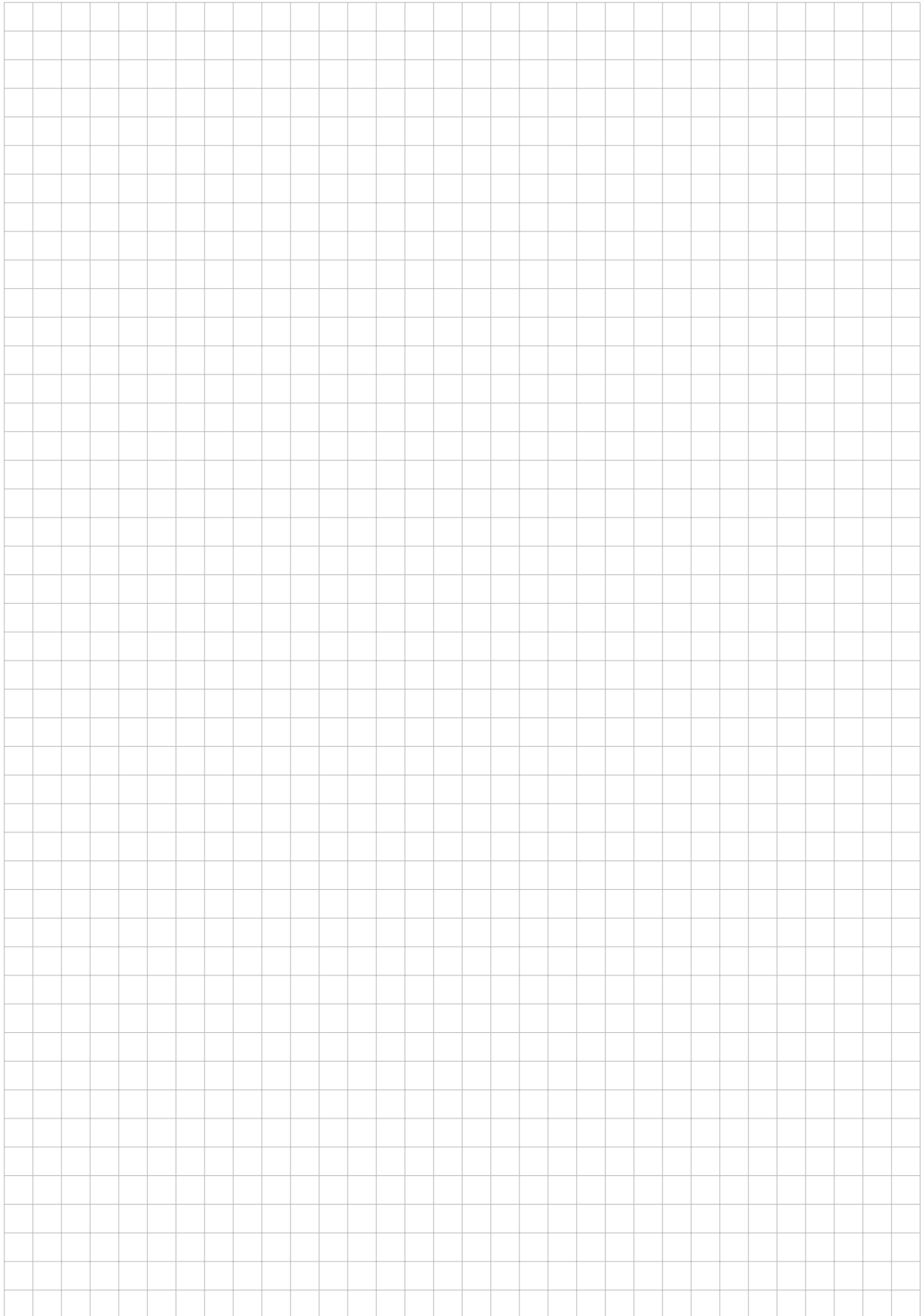
6. Treffen Sie anhand des p-Werts eine Testentscheidung bei einer Irrtumswahrscheinlichkeit von 5%.



7. Bestimmen Sie die kritische Schranke bei einer Irrtumswahrscheinlichkeit von 5%.



Schmierpapier zu Aufgabe 2



5. Zeigen Sie, dass die logarithmierte Likelihoodfunktion der Exponentialverteilung folgende Form hat:

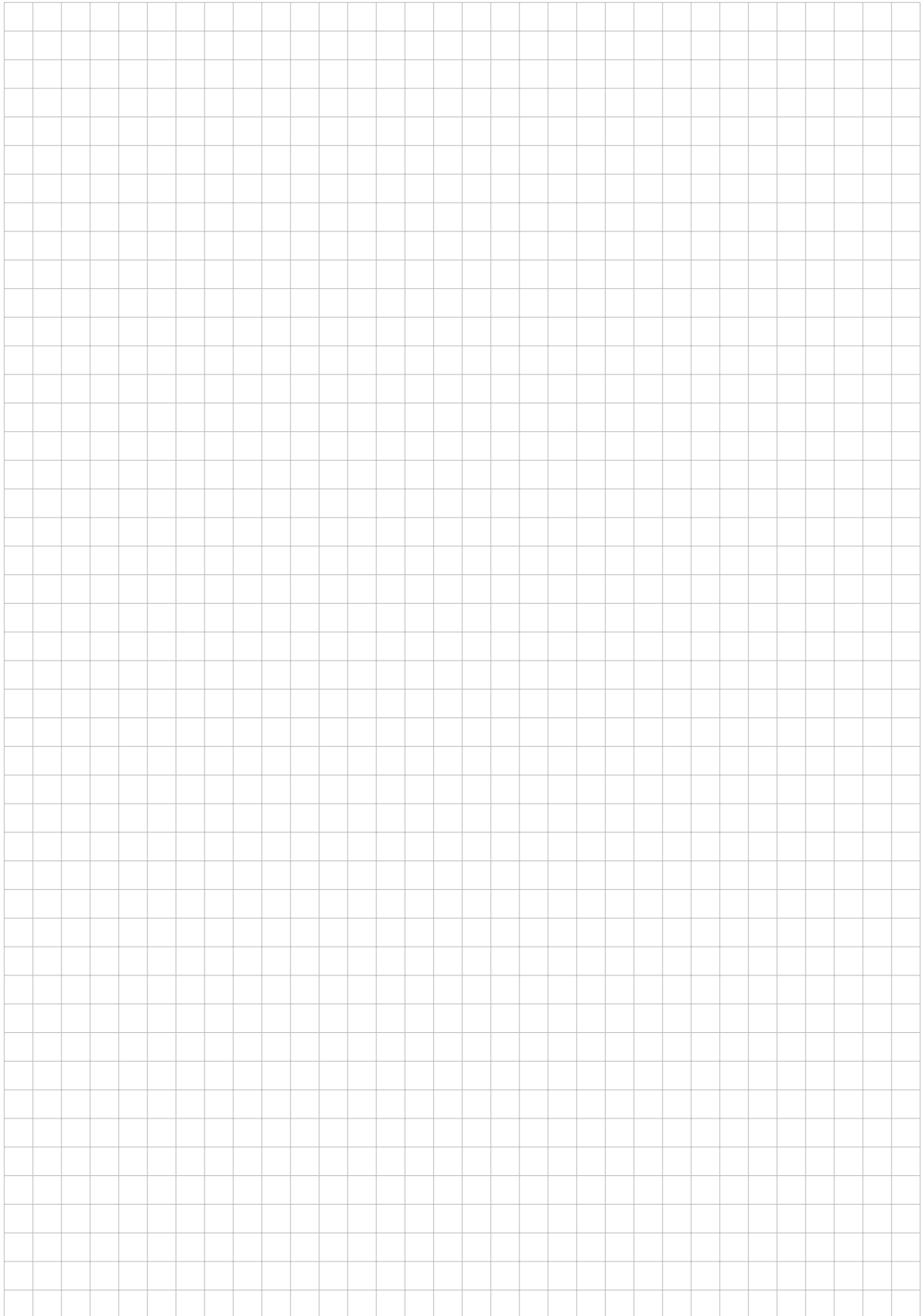
$$\ln L(\lambda) = n \ln(\lambda) - \lambda \sum_{i=1}^n x_i$$

6. Zeigen Sie, dass der Maximum-Likelihood-Schätzer für den Parameter λ gleich $1/\bar{X}_n$ ist. Gehen Sie davon aus, dass die hinreichende Bedingung für das Maximum erfüllt ist.

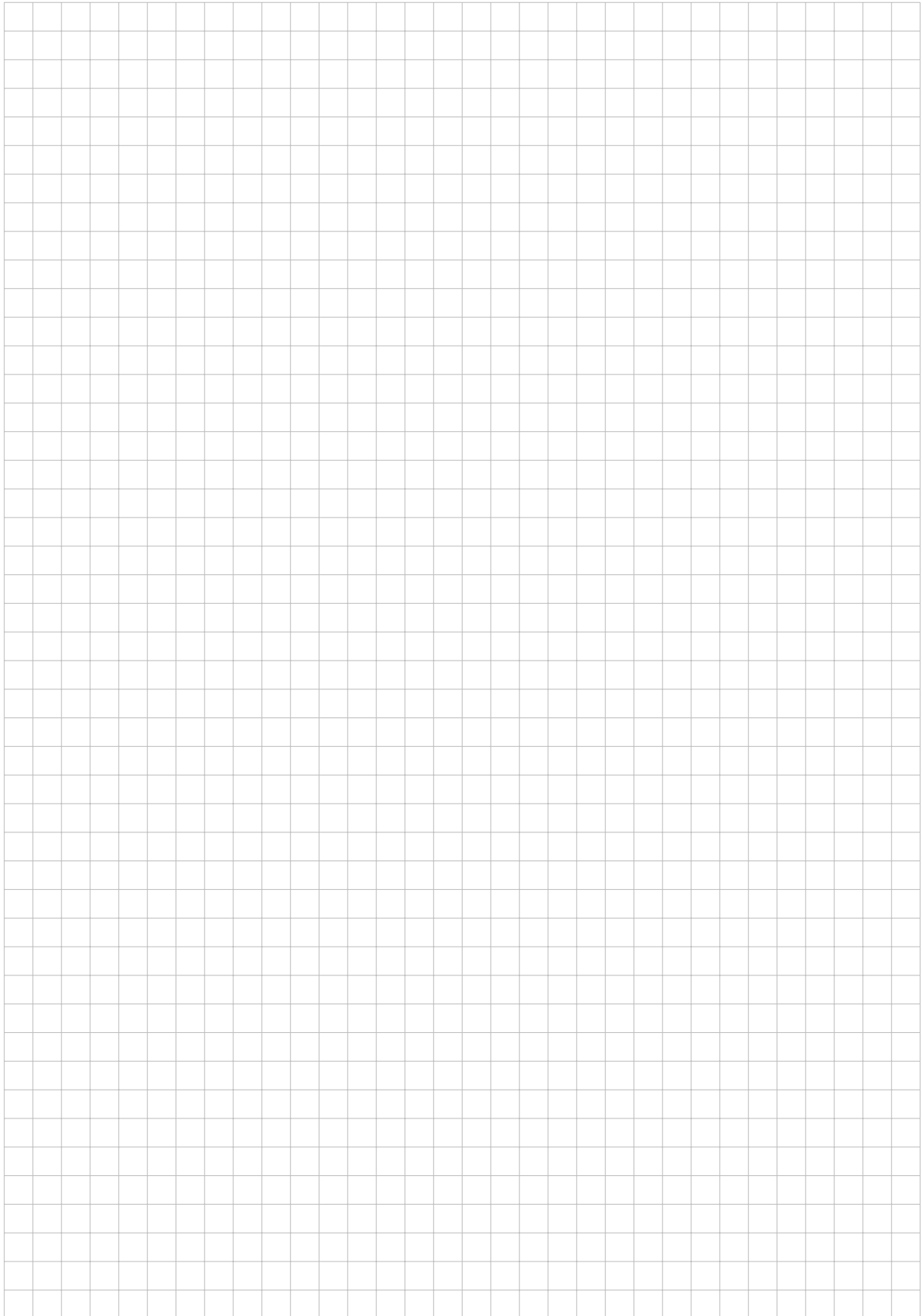
Beim Mittagessen auf der Kristall-Hütte äußert Nina die Befürchtung, dass Christian wertvolle Fahrzeit verliert, da er so lange auf sie warten muss. Um sie zu beruhigen, stoppt Christian bei den folgenden 10 Fahrten die Wartezeiten in Minuten:

Messung i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Zeit (x_i)	0.34	1.06	0.15	2.53	1.18	0.66	1.56	4.12	4.39	1.58

Schmierpapier zu Aufgabe 3



Schmierpapier zu Aufgabe 4



Lösung Klausur WS13/14 (7.5ECTS)

Hinweis

Die Lösungen für die Aufgaben 1 bis 3 können Sie der Musterlösung der 10 ECTS Klausur entnehmen.

Aufgabe 4

1. Die Normalverteilung ist eine Verteilung auf ganz \mathbb{R} , und kann daher auch negative Werte annehmen. (0.5P)
2. (a) 0, da Punktwahrscheinlichkeit bei stetiger ZV (0.5P)
(b) 0.6318 (0.5P Umformung, 0.5P Ergebnis)
3. $\mu_{\text{neu}} = \frac{\mu_X}{1000}$, $\sigma_{\text{neu}}^2 = \frac{\sigma_X^2}{1000^2}$ (je 0.5P)
4. Reproduktivität (0.5P)
5. $\text{Var}(X + Y) \stackrel{\text{unabh.}}{=} \text{Var}(X) + \text{Var}(Y) = 15$ (0.5P)
6. Nein, da Korrelation nur **lineare** Abhängigkeit misst. (0.5P)
7. $\rho_{X,Y} = 0.6237$ (0.5P)
8. $\text{Var}(X + Y) \stackrel{\text{n. unabh.}}{=} \text{Var}(X) + \text{Var}(Y) + \text{Cov}(X, Y) = 23.82$
(0.5P Ansatz, 0.5P Ergebnis)
9. $\mu_X = 34.1$, $\mu_Y = 39.9$, $\sigma_X^2 = 5$, $\sigma_Y^2 = 10$, $\rho_{X,Y} = 0.5$ (0.5P)
10. Er wirkt sich positiv aus, da $Y(x)$ Linearform – überdurchschnittlicher Wert. (0.5P)
von x bedeutet, dass $x > \mu_X \leftrightarrow (x - \mu_X) > 0 \leftrightarrow$ positiver Steigungskoeffizient \leftrightarrow im Mittel ist der Wert von $Y(x)$ höher
11. $\mu_{Y(35.1)} = 40.6071$, $\sigma_{Y(35.1)}^2 = 5$ (je 0.5P)

12. (a) 0.4124 (0.5P)
(b) 0.1841 (0.5P)
13. X und Y sind positiv korreliert (0.5P) (0.5P)
– aus einem überdurchschnittlich hohen Wert von X ($x = 35.1 > 34.1 = \mu_X$) folgt mit höherer Wahrscheinlichkeit ein überdurchschnittlich hoher Wert von Y .

Klausur Statistik (10 ECTS)

Aufgaben und Lösung

Name		Prüfer	Prof. Dr. I. Klein
Vorname		Arbeitszeit	Mittwoch, 12.02.2014
Matrikelnummer			14:00 – 16:00 Uhr
Studienrichtung		Sitzplatznummer	
Semesterzahl		Raum	
Email (optional)			

Hinweise: Aufgabenblätter nicht auseinandertrennen!

Ergebnis:

Statistik	
Aufgabe	Punkte
1	
2	
3	
4	
Summe	
Note:	

Unterschrift des Kandidaten: _____

Unterschrift des Prüfers: _____

Hilfsmittel:

Zugelassen sind eine selbsterstellte maximal vierseitige (DIN A4 doppelseitig) Formelsammlung, die vom Lehrstuhl zum Download bereitgestellte Tabellensammlung ohne Eintragungen und die R-Reference-Card (by Jonathan Baron) ohne Eintragungen.

Darüber hinaus sind Taschenrechner zugelassen. Es dürfen jedoch keine Programme oder Programmteile verwendet werden, die nicht fest in den Taschenrechner eingebaut sind. Alle Hilfsmittel sind selbst mitzubringen.

Bewertung:

Für jede Aufgabe werden maximal zehn Punkte vergeben. Bewertet werden grundsätzlich nur Lösungen, die im Lösungsteil stehen und für die folgendes beachtet wird:

- Der Lösungsweg muss aus einer Darstellung der einzelnen Rechenschritte ersichtlich sein.
- Antworten sind stets zu begründen, es sei denn es wird ausdrücklich keine Begründung verlangt.
- Unleserliche Aufgabenteile werden mit 0 Punkten bewertet.

Viel Erfolg!

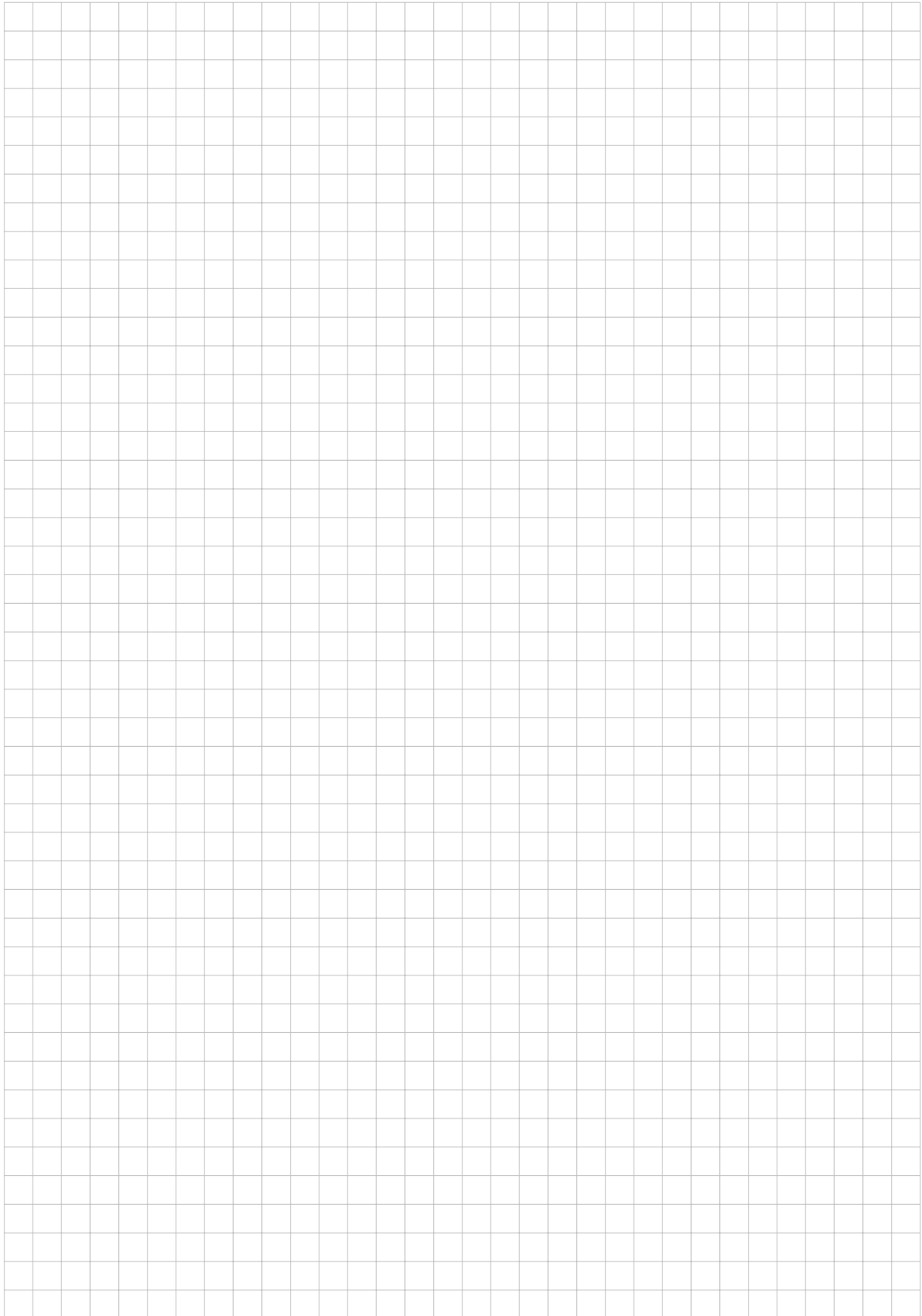
12. Welcher Typ von Kardinalskalen wird jeweils in den folgenden Aussagen charakterisiert?

(a) Die Merkmalsausprägungen entstehen durch Zählen.

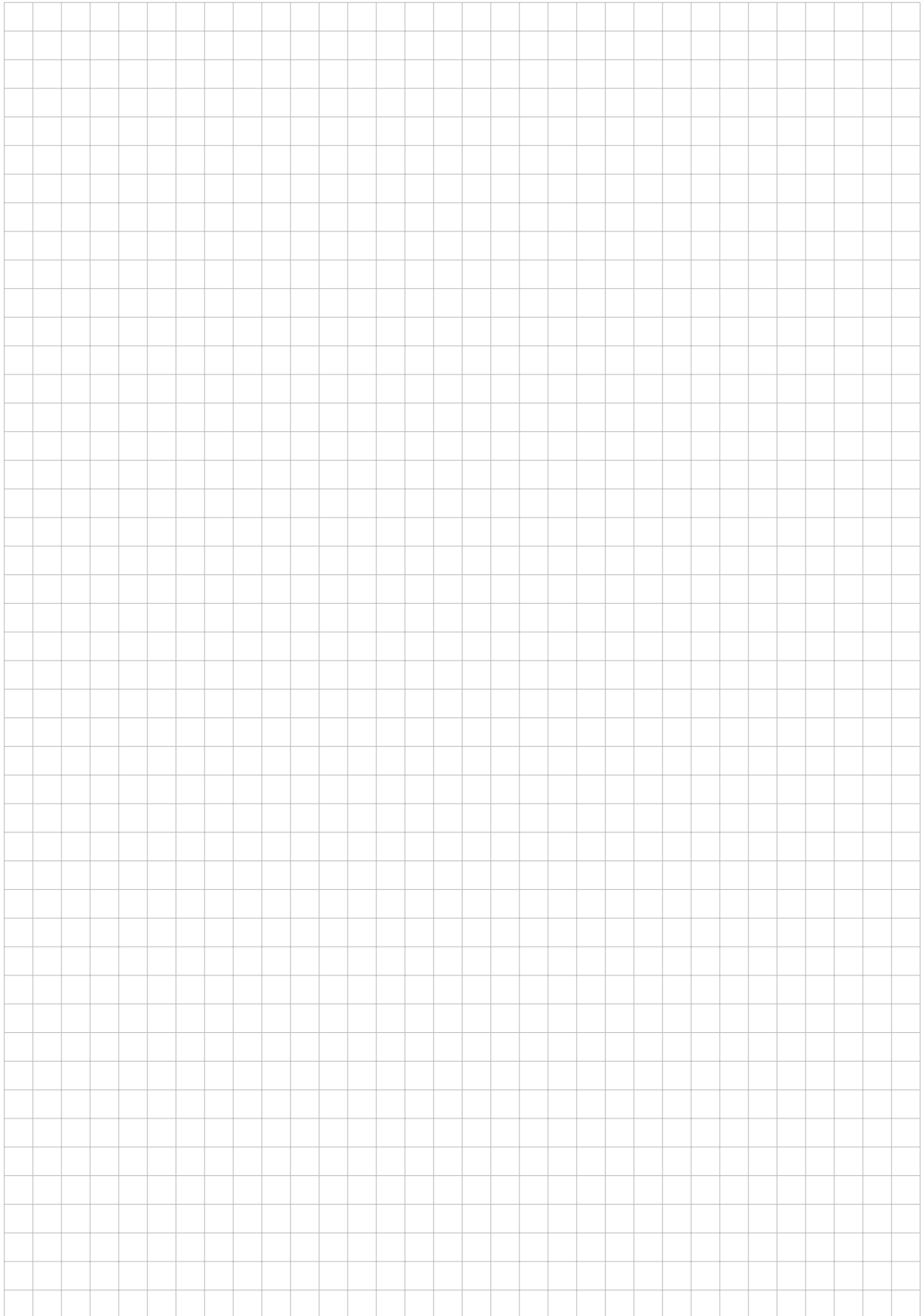
(b) Eine Merkmalsausprägung ist doppelt so groß wie eine andere.

(c) Die Abstände zwischen je zwei Merkmalsausprägungen sind vergleichbar, aber es gibt keinen natürlichen Nullpunkt.

Schmierpapier zu Aufgabe 1



Schmierpapier zu Aufgabe 2



Aufgabe 3

1. Erläutern Sie kurz die Idee der Maximum-Likelihood-Schätzung für diskrete Stichprobenvariablen.

2. Der Fehler 2. Art beschreibt das Ereignis, die Nullhypothese _____, obwohl sie _____ ist.

Christian und Nina machen eine Ski-Tagesfahrt. Da Nina langsamer fährt, wartet Christian nach jeder Abfahrt am Lift auf sie. Sei die Zufallsvariable

X : „Christians Wartezeit in Minuten“

exponentialverteilt mit unbekanntem Parameter $\lambda > 0$.

3. Geben Sie die Varianz von X in Abhängigkeit von λ an.

4. Sei in dieser Teilaufgabe $\lambda = 2$. Mit welcher Wahrscheinlichkeit wartet Christian
 - a) mehr als 30 Sekunden, aber weniger als 90 Sekunden,

- b) mindestens 3 Minuten?

5. Zeigen Sie, dass die logarithmierte Likelihoodfunktion der Exponentialverteilung folgende Form hat:

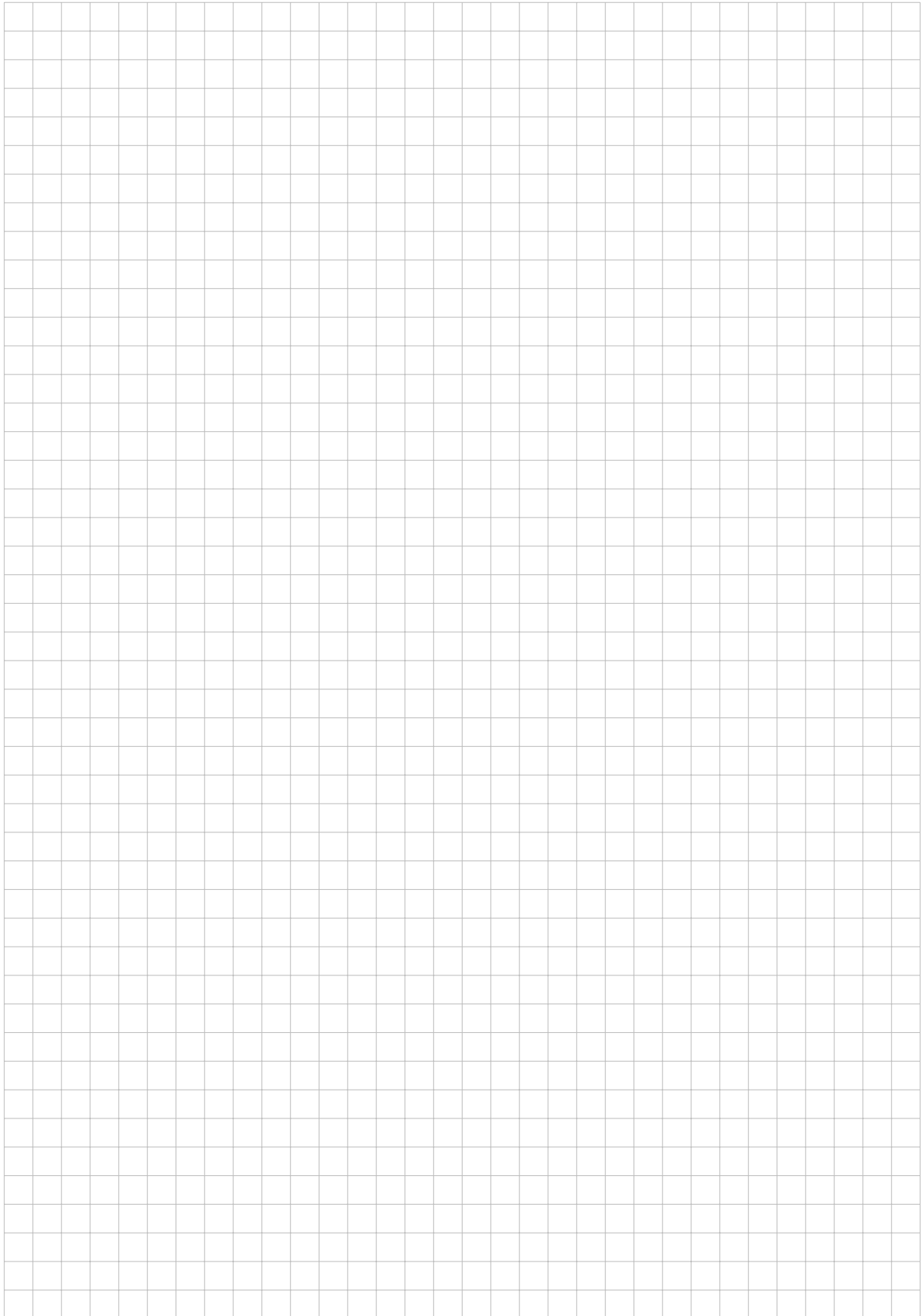
$$\ln L(\lambda) = n \ln(\lambda) - \lambda \sum_{i=1}^n x_i$$

6. Zeigen Sie, dass der Maximum-Likelihood-Schätzer für den Parameter λ gleich $1/\bar{X}_n$ ist. Gehen Sie davon aus, dass die hinreichende Bedingung für das Maximum erfüllt ist.

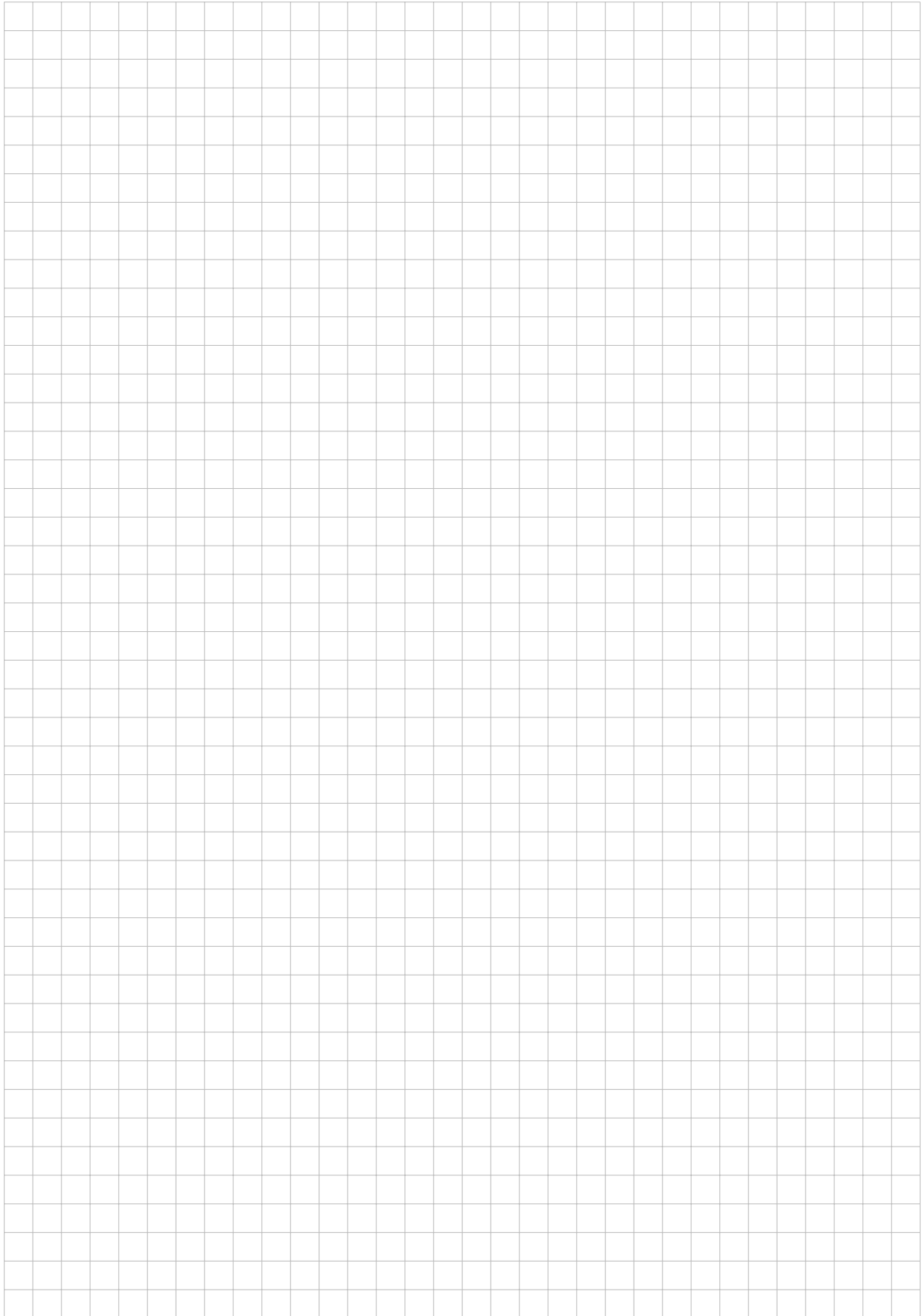
Beim Mittagessen auf der Kristall-Hütte äußert Nina die Befürchtung, dass Christian wertvolle Fahrzeit verliert, da er so lange auf sie warten muss. Um sie zu beruhigen, stoppt Christian bei den folgenden 10 Fahrten die Wartezeiten in Minuten:

Messung i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Zeit (x_i)	0.34	1.06	0.15	2.53	1.18	0.66	1.56	4.12	4.39	1.58

Schmierpapier zu Aufgabe 3



Schmierpapier zu Aufgabe 4



Lösung Klausur WS13/14 (10ECTS)

Aufgabe 1

1. $0.262(1 - 0.434) = 0.1483$ (1P)
2. $f(N \cap M) = \frac{1}{2}[0.434 - (0.3 - 0.1483)] = 0.141$ (1P)
3. $1000 \cdot 0.434 = 434$ (0.5P)
4. Es gibt 293 Nie-Raucherinnen. (0.5P)
5. $V = \sqrt{0.0379 / \min\{3 - 1, 2 - 1\}} = 0.1947$ (1P)
Die Assoziation/Zusammenhang zwischen den Merkmalen ist relativ schwach. (0.5P)
6. Entropie (0.5P)
7. Modus, Frauen (1P)
8. $f_{Bin}(10; 20, 0.3) = 0.0308$ (1P)
9. Bernoulli-Verteilung (0.5P)
10. 4 (0.5P)
11. 30% (0.5P)
12. (a) Absolutskala (0.5P)
(b) Verhältnisskala oder Absolutskala (0.5P)
(c) Intervallskala, Verhältnisskala oder Absolutskala (0.5P)

Aufgabe 2

1. a) $1 - F_{\text{Poi}}(5; 1.5) = 1 - 0.9955 = 0.0045$ (1P)
- b) $P(X \leq 1.5) = F_{\text{Poi}}(1; 1.5) = 0.5578$ (1P)
- c) $P(-1.2247 < X < 1.2247) = P(X < 1.2247)$
 $= F_{\text{Poi}}(1; 1.5) = 0.5578$ (1P)
2. Wenn z.B. der zweite Pearsonsche Schiefekoeffizient betrachtet wird:
 Bestimmung der fehlenden Größen (0.5P)
 Median: 1
 Berechnung des Schiefemaßes (0.5P)
 $(1.5 - 1)/\sqrt{1.5} = 0.4082$
 Richtige Interpretation des eben bestimmten Wertes (0.5P)
 $0.4082 > 0$: Verteilung ist rechtsschief
3. Herleitung (0.5P)
 z.B. $E[X] = \lambda \Rightarrow \hat{\lambda}_{\text{MM}} = \bar{X}_n$
 Berechnung: $\hat{\lambda}_{\text{MM}} = 196/127 = 1.5433$ (1P)
4. $\sqrt{n} \frac{\bar{x}_n - \lambda_0}{\sqrt{\lambda_0}} = \sqrt{127} \frac{1.5433 - 1.5}{\sqrt{1.5}} = 0.3984$ (1.5P)
5. $p = P(T_n > t_n | H_0) = 1 - \Phi(0.40) = 1 - 0.6554 = 0.3446$ (1P)
6. Vergleich des p-Werts mit dem Referenzwert (0.5P)
 $0.3446 > 0.05$
 Korrekte Testentscheidung basierend auf dem eben aufgestellten Vergleich (0.5P)
 Entweder:
 p-Wert < Referenzwert \Rightarrow Ablehnung der Nullhypothese
 Oder:
 p-Wert > Referenzwert \Rightarrow Nicht-Ablehnung der Nullhypothese
7. $\lambda_{0.95} = 1.6448$. (0.5P)

Aufgabe 3

1. Suche nach Parameterwert $\hat{\theta}$, für den die Wahrscheinlichkeit für das Auftreten der realisierten Stichprobe maximal ist. (0.5P)
2. nicht abzulehnen; falsch (1P)
3. $Var(X) = \sigma_X^2 = \frac{1}{\lambda^2}$ (0.5P)
4. a) $P(0.5 < X < 1.5) = F_{Exp(2)}(1.5) - F_{Exp(2)}(0.5)$ (1P)

$$= (1 - e^{-2 \cdot 1.5}) - (1 - e^{-2 \cdot 0.5}) = 0.3181$$
 b) $P(X \geq 3) = 1 - P(X \leq 3) = 1 - 0.9975 = 0.00248$ (0.5P)
5. $L(\lambda) = \prod_{i=1}^n f_X(x_i; \lambda) = \prod_{i=1}^n \lambda e^{-\lambda x_i} = \lambda^n e^{-\lambda \sum_{i=1}^n x_i}$ (1P)

$$\ln L(\lambda) = \ln \left(\lambda^n e^{-\lambda \sum_{i=1}^n x_i} \right) = n \ln(\lambda) - \lambda \sum_{i=1}^n x_i$$
 (0.5P)
6. $\frac{\partial}{\partial \lambda} \ln L(\lambda) = \frac{n}{\lambda} - \sum_{i=1}^n x_i \stackrel{!}{=} 0 \implies \hat{\lambda} = \frac{n}{\sum_{i=1}^n x_i} = \frac{1}{\bar{X}_n} = (\bar{X}_n)^{-1}$ (1P+0.5P)
7. $\hat{\mu}_X = \frac{1}{\hat{\lambda}} = \frac{1}{\frac{n}{\sum_{i=1}^n x_i}} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i = 1.757$ (0.5P)
8. Invarianzeigenschaft (0.5P)
9. $\mu_X = \frac{1}{\lambda} \implies \mu_X = 2 \Leftrightarrow \frac{1}{\lambda} = 2 \Leftrightarrow \lambda = \frac{1}{2}$ (0.5P)
10. $\left[\frac{9.59}{2 \cdot 17.57} ; \frac{34.17}{2 \cdot 17.57} \right] = [0.2729 ; 0.9724]$ (0.5P)

Endweder: (0.5P)

Mit einer Vertrauenswürdigkeit von 95% liegt der Parameter λ in diesem Intervall

oder:

In 95% der Fälle liegt der Parameter λ in diesem Intervall

11. **Endweder:**

$$\chi_{0.025;20}^2 = 9.59 < t_{10}(x_1, \dots, x_{10}; 2) = 17.57 < 34.17 = \chi_{0.975;20}^2 \quad (1P)$$

$\Rightarrow H_0$ nicht ablehnen auf 5%-Niveau.

oder:

$\lambda_0 \in KI \Rightarrow H_0$ nicht ablehnen auf 5%-Niveau.

Aufgabe 4

1. numeric (*oder* integer) (0.5P)
2. z.B. `>sum(amando$Bestellwert)` (1P)
3. z.B. `>amando$Retourenwert/amando$Bestellwert` (1P)
4. `kov=function(vek1, vek2){`
 `mean(vek1*vek2)-mean(vek1)*mean(vek2)`
 `}` (1.5P)
5. Bestellwert und Retourenwert (0.5P)
6. (a) 30 (0.5P)
 (b) 25 (0.5P)
 (c) 116.03998 (0.5P)
 (d) 1642.54 (0.5P)
7. Tabelle der relativen Häufigkeiten der Zahlungsmethode von Bestellungen,
 die Schuhe und Bücher enthielten (1P)
8. `> t.test(Re.r,Kr.r,mu=0,alternative="greater",`
 `paired=FALSE, var.equal=TRUE, conf.level=0.95)` (1.5P)
9. `> 1-pt(-6.7396,998)` (1P)