

Klausur Statistik (7,5 ECTS)

Aufgaben und Lösung

Name		Prüfer	Prof. Dr. I. Klein
Vorname		Arbeitszeit	Mittwoch, 7. 8. 2013 14:00 – 16:00 Uhr
Matrikelnummer			
Studienrichtung		Sitzplatznummer	
Semesterzahl		Raum	
Email (optional)			

Hinweis: Aufgabenblätter nicht auseinandertrennen!

Ergebnis:

Statistik	
Aufgabe	Punkte
1	
2	
3	
4	
Summe	
Note:	

Unterschrift des Kandidaten: _____

Unterschrift des Prüfers: _____

Hilfsmittel:

Zugelassen sind eine selbsterstellte maximal vierseitige (DIN A4 doppelseitig) Formelsammlung, die vom Lehrstuhl zum Download bereitgestellte Tabellensammlung ohne Eintragungen und die R-Reference-Card (by Jonathan Baron) ohne Eintragungen.

Darüber hinaus sind Taschenrechner zugelassen. Es dürfen jedoch keine Programme oder Programmteile verwendet werden, die nicht fest in den Taschenrechner eingebaut sind. Alle Hilfsmittel sind selbst mitzubringen.

Bewertung:

Für jede Aufgabe werden maximal zehn Punkte vergeben. Bewertet werden grundsätzlich nur Lösungen, die im Lösungsteil stehen und für die folgendes beachtet wird:

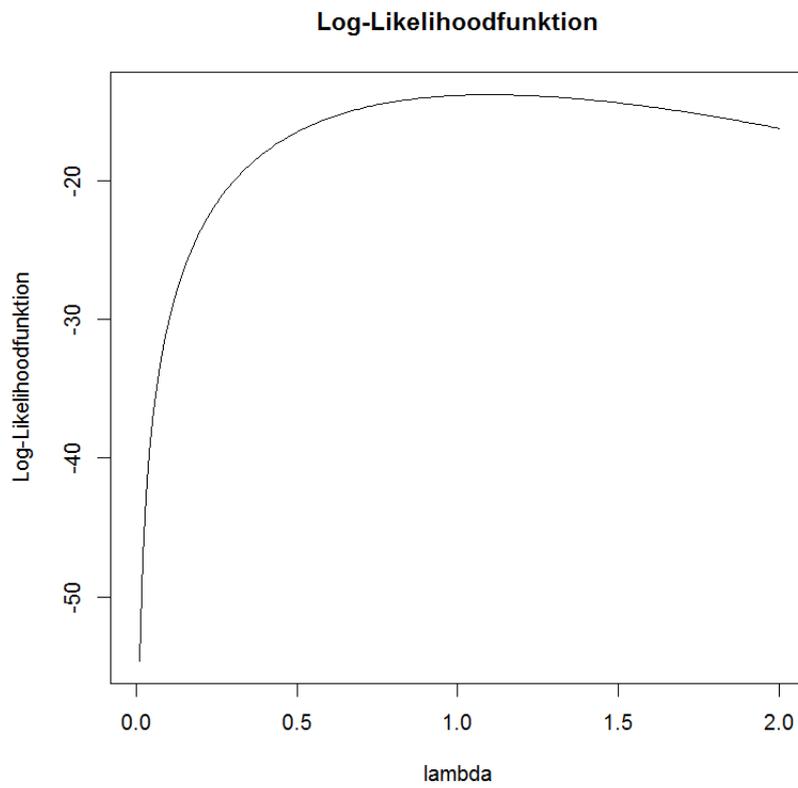
- Der Lösungsweg muss aus einer Darstellung der einzelnen Rechenschritte ersichtlich sein.
- Antworten sind stets zu begründen, es sei denn es wird ausdrücklich keine Begründung verlangt.
- Unleserliche Aufgabenteile werden mit 0 Punkten bewertet.

Viel Erfolg!

Schmierpapier:



9. Markieren Sie in folgender Grafik die Stelle des ML-Schätzers für λ :



10. Sie möchten Ihre Vermutung, dass $\lambda > 1$ ist, testen. Hierzu formulieren Sie folgendes Hypothesenpaar:

$$H_0 : \lambda = \lambda_0 \leq 1 \quad \text{gegen} \quad H_1 : \lambda = \lambda_1 > 1. \quad (1)$$

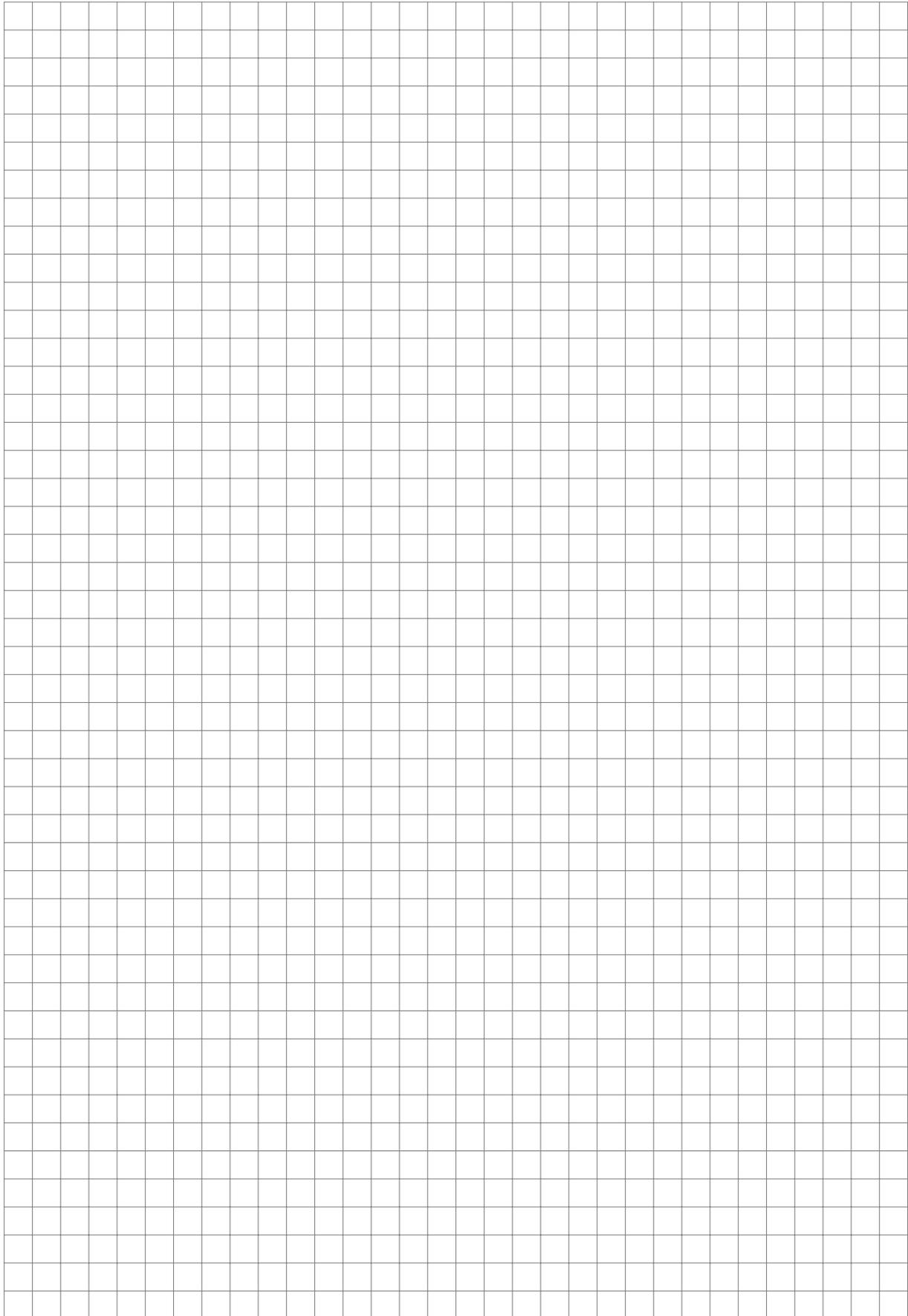
Als Prüfgröße für den Test verwenden Sie $T_n = \sum_{i=1}^n X_i$. Sie wissen, dass unter Gültigkeit von H_0 gilt: $T_n \stackrel{H_0}{\sim} Poi(n\lambda_0)$. Folgender R-Code steht Ihnen zur Verfügung:

```
> blitz=c(1,4,2,1,0,1,1,1,0,0)
> (Tn=sum(blitz))
[1] 11
> dpois(Tn, 10)
[1] 0.1137364
> 1-ppois(Tn, 10)
[1] 0.3032239
> ppois(Tn, 11)
[1] 0.5792668
> qpois(1-0.0487, 10)
[1] 16
> qpois(0.90 , blitz)
[1] 2 7 4 2 0 2 2 2 0 0
```

Vervollständigen Sie die folgenden Aussagen:

- (a) Der Wert der Teststatistik beträgt _____
- (b) Der p-Wert des unter (1) beschriebenen Hypothesentests beträgt _____.
- (c) Der Befehl zur Berechnung der Stichprobenstandardabweichung lautet _____.
- (d) Die kritische Schranke bei einer Irrtumswahrscheinlichkeit von 4.87% beträgt _____.

Schmierpapier:



Aufgabe 1

1. Teilerhebung (0.5 Punkte)
2. Sekundärstatistische Quelle (0.5 Punkte)
3. pie (0.5 Punkte)
labels (0.5 Punkte)
"Alleine", "WG" (0.5 Punkte)
4.
 - Merkmal B
 - qualitatives Merkmal (0.5 Punkte)
 - Nominalskala (0.5 Punkte)
 - keine objektive Reihenfolge (0.5 Punkte)
 - Merkmal C
 - qualitatives Merkmal (0.5 Punkte)
 - Nominalskala (0.5 Punkte)
 - keine objektive Reihenfolge (0.5 Punkte)
5. vollständiges und korrektes Ausfüllen liefert (0.5 Punkte)

Wohnsituation \ Geschlecht	weiblich	männlich	Σ
Alleine	0.0625	0.0625	0.125
WG	<u>0.125</u>	<u>0.1875</u>	0.3125
bei den Eltern	<u>0.125</u>	<u>0.125</u>	0.25
Studentenwohnheim	0.1875	0	0.1875
mit Partner/in	0.0625	0	0.0625
nicht zuzuordnen	0	0.0625	0.0625
Σ	0.5625	0.4375	1

6. $H_B^* = -\frac{0.5625 \cdot \log_2(0.5625) + 0.4375 \cdot \log_2(0.4375)}{\log_2(2)}$ (0.5 Punkte)
 $= 0.9887$ (0.5 Punkte)
 (sehr) hohe Streuung (0.5 Punkte)
7. (a)
 - perfekte Gleichverteilung (0.5 Punkte)
 - d.h. maximale Streuung (0.5 Punkte)
 - $H_{B|C=\text{alleine}}^* = 1$ (0.5 Punkte)
 (b)
 - perfekte Einpunktverteilung (0.5 Punkte)
 - $H_{B|C=\text{Studentenwohnheim}}^* = 0$ (0.5 Punkte)

Aufgabe 2

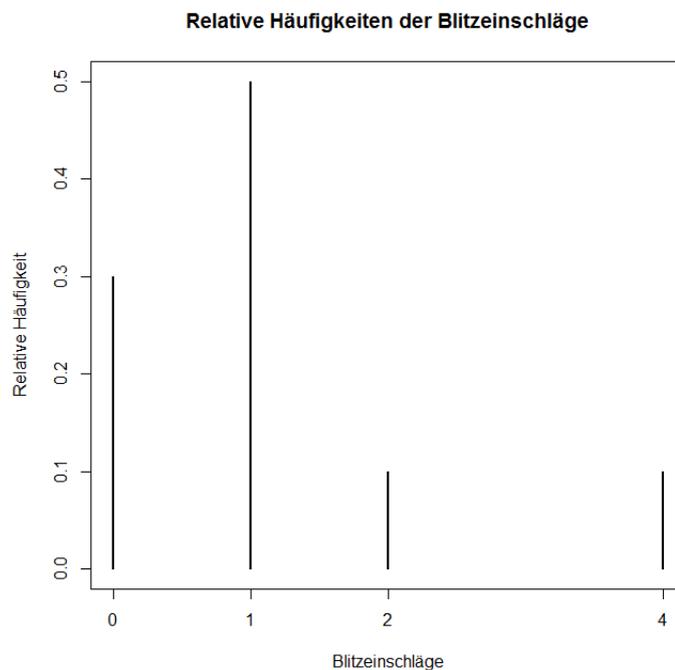
1. Quantitativ (0.5P); Verhältnisskala (0.5P)
2. 1300 (0.5P)
3. 280 (0.5P)
4. $\frac{1350-1256}{\sqrt{15430}} = 0.7567$ (1.5P)
5. $s_{XY} = \frac{5}{4} \left(2501620 - \frac{6280}{5} \cdot \frac{9920}{5} \right) = 12145$ (2P)
6. $\rho_{XY} = \frac{12145}{\sqrt{15430 \cdot 14530}} = 0.8111$ (1P)
7. $\frac{1}{4} \sum_{i=1}^5 (d_i - \bar{d})^2 = 5670$ (1P)
8. Ja, da der Variationskoeffizient dimensionslos ist. (0.5P)
9. (a) $H_1 : \delta > 700$ (0.5P)
(b) H_0 wird nicht abgelehnt (0.5P), da $p > \alpha$ ist (0.5P).
(c) Der p -Wert ändert sich nicht. (0.5P)

Aufgabe 3

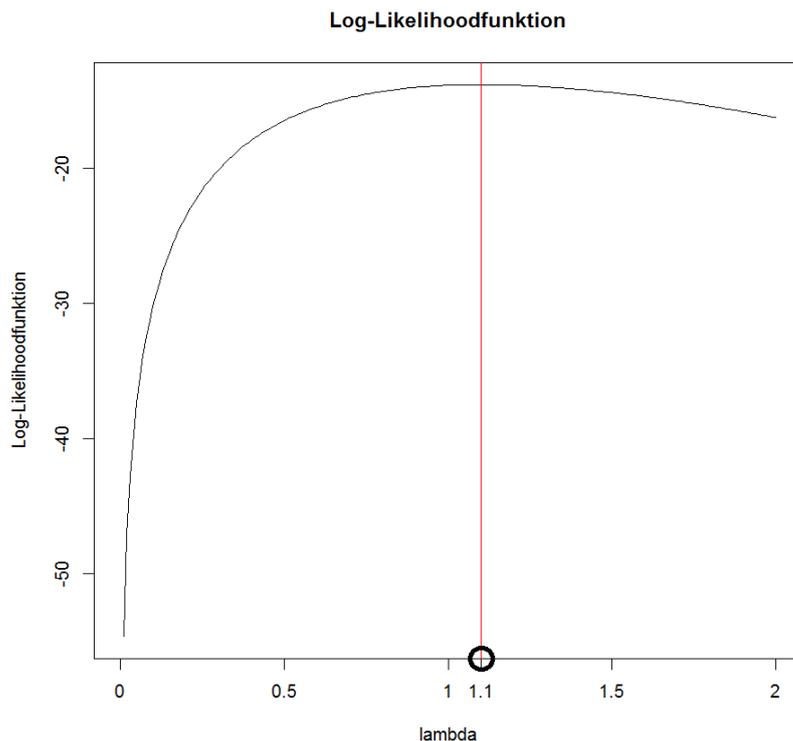
1. $E[10X] = 10\lambda_X = 10$. (0.5P)
2.
 - Modus bei 0 und 1 (1P)
 - Median bei 1, da $F_X(1) > 0.5$ und $F_X(0) < 0.5$. (0.5P)
3. $P(X \geq 2) = 1 - F_X(1) = 0.2642$ (1P)
4. $a = 100 * f_X(0) = 36.7879$, $b = 100 * f_X(1) = 36.7879$, $c = 6.4197 - 1.2524 - 4.0540 = 1.1133$. (1.5P)

i	X_i	n_i	np_i^0	$\frac{(n_i - np_i^0)^2}{np_i^0}$
1	$x_i = 0$	30	a	1.2524
2	$x_i = 1$	49	b	4.0540
3	$x_i \geq 2$	21	26.4241	c

5. $\chi_{0.9;2}^2 = 4.61$. (0.5P)
6. Da $6.4197 > 4.61$ lehne H_0 ab. (0.5P)



7. (1P)
8. $\hat{\lambda}_{MM} = 10^{-1} \sum_{i=1}^{10} x_i = 1.1$ (1P)



9.

(0.5)

- (a) Der Wert der Teststatistik beträgt 11
- (b) Der p-Wert des unter (1) beschriebenen Hypothesentests beträgt 0.3032.
- (c) Der Befehl zur Berechnung der Stichprobenstandardabweichung lautet sd() oder sqrt(var()).
- (d) Die kritische Schranke bei einer Irrtumswahrscheinlichkeit von 4.87% beträgt 16.

Aufgabe 4

1. 1536 (**0.5P**)
2. `sum(X)` (**0.5P**)
3. 1 (**0.5P**)
4. `qt(0.778,12)` (**0.5P**)
5. Vermutung: $p_1 > p_2$ daraus folgt Hypothese $H_0 : p_1 \leq p_2$ vs. $H_1 : p_1 > p_2$ (**0.5P**)
6. 0.2080 (**0.5P**)
7. Kritischer Bereich: $T > \lambda_{1-\alpha}$ mit $\alpha = 5\%$ (0.5P f. $>$, 0.5P f. λ , 0.5P f. α (nicht $\frac{\alpha}{2}$))
(**1.5P**)
8. 0.025 (0.5P GegenWS, 0.5P Ergebnis)(**1P**)
9. 1 (Umformen auf Pivotgr. 1P, IntervallWS 0.5P, Ergebnis 0.5P)(**2P**)
10. 0.5P f. Berechnung $T = 1.1029$, 0.5P f. richtige Entscheidung (H_0 ablehnen) basierend auf T (**1P**)
11. Nein, da H_0 immer noch abgelehnt wird, da $T > KS$ (**0.5P**)
12. `1-pnorm(1.5,0,1)` (0.5P f. Umformen, 0.5P f. richtigen Befehl) (**1P**)

Klausur Statistik (10 ECTS)

Aufgaben und Lösung

Name		Prüfer	Prof. Dr. I. Klein
Vorname		Arbeitszeit	Mittwoch, 7. 8. 2013 14:00 – 16:00 Uhr
Matrikelnummer			
Studienrichtung		Sitzplatznummer	
Semesterzahl		Raum	
Email (optional)			

Hinweise: Aufgabenblätter nicht auseinandertrennen!

Ergebnis:

Statistik	
Aufgabe	Punkte
1	
2	
3	
4	
Summe	
Note:	

Unterschrift des Kandidaten: _____

Unterschrift des Prüfers: _____

Hilfsmittel:

Zugelassen sind eine selbsterstellte maximal vierseitige (DIN A4 doppelseitig) Formelsammlung, die vom Lehrstuhl zum Download bereitgestellte Tabellensammlung ohne Eintragungen und die R-Reference-Card (by Jonathan Baron) ohne Eintragungen.

Darüber hinaus sind Taschenrechner zugelassen. Es dürfen jedoch keine Programme oder Programmteile verwendet werden, die nicht fest in den Taschenrechner eingebaut sind. Alle Hilfsmittel sind selbst mitzubringen.

Bewertung:

Für jede Aufgabe werden maximal zehn Punkte vergeben. Bewertet werden grundsätzlich nur Lösungen, die im Lösungsteil stehen und für die folgendes beachtet wird:

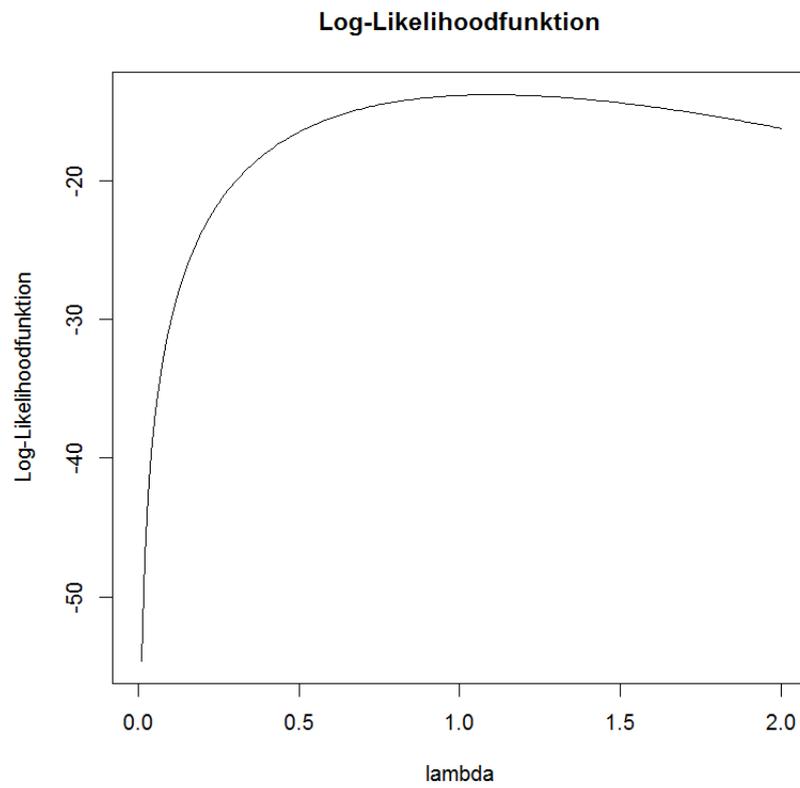
- Der Lösungsweg muss aus einer Darstellung der einzelnen Rechenschritte ersichtlich sein.
- Antworten sind stets zu begründen, es sei denn es wird ausdrücklich keine Begründung verlangt.
- Unleserliche Aufgabenteile werden mit 0 Punkten bewertet.

Viel Erfolg!

Schmierpapier:



9. Markieren Sie in folgender Grafik die Stelle des ML-Schätzers für λ :



Schmierpapier:



Aufgabe 1

1. Teilerhebung (0.5 Punkte)
2. Sekundärstatistische Quelle (0.5 Punkte)
3. (z.B.) Tortendiagramm (0.5 Punkte)
4.
 - Merkmal B
 - qualitatives Merkmal (0.5 Punkte)
 - Nominalskala (0.5 Punkte)
 - keine objektive Reihenfolge (0.5 Punkte)
 - Merkmal C
 - qualitatives Merkmal (0.5 Punkte)
 - Nominalskala (0.5 Punkte)
 - keine objektive Reihenfolge (0.5 Punkte)
5. vollständiges und korrektes Ausfüllen liefert (1.5 Punkte)
 - (Ausfüllen mit maximal einem falschen/leeren Feld gibt 1 Punkt)
 - (Ausfüllen mit maximal zwei falschen/leeren Feldern gibt 0.5 Punkte)

Wohnsituation \ Geschlecht	weiblich	männlich	Σ
Alleine	0.0625	0.0625	<u>0.125</u>
WG	<u>0.125</u>	<u>0.1875</u>	<u>0.3125</u>
bei den Eltern	<u>0.125</u>	<u>0.125</u>	0.25
Studentenwohnheim	0.1875	0	<u>0.1875</u>
mit Partner/in	0.0625	0	0.0625
nicht zuzuordnen	0	0.0625	<u>0.0625</u>
Σ	0.5625	0.4375	1

6. $H_B^* = -\frac{0.5625 \cdot \log_2(0.5625) + 0.4375 \cdot \log_2(0.4375)}{\log_2(2)}$ (0.5 Punkte)
 - $= 0.9887$ (0.5 Punkte)
 - (sehr) hohe Streuung (0.5 Punkte)
7. (a)
 - perfekte Gleichverteilung (0.5 Punkte)
 - d.h. maximale Streuung (0.5 Punkte)
 - $H_{B|C=\text{alleine}}^* = 1$ (0.5 Punkte)
- (b)
 - perfekte Einpunktverteilung (0.5 Punkte)
 - $H_{B|C=\text{Studentenwohnheim}}^* = 0$ (0.5 Punkte)

Aufgabe 2

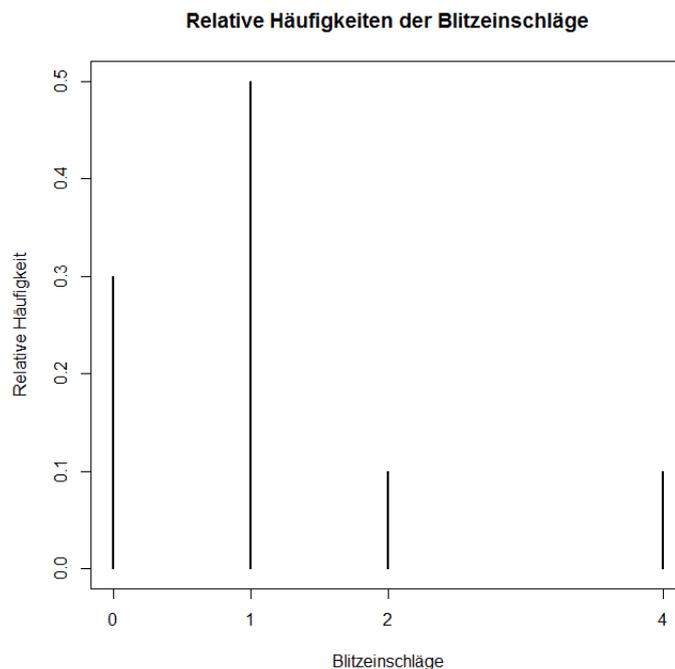
1. Quantitativ (0.5P); Verhältnisskala (0.5P)
2. 1300 (0.5P)
3. 280 (0.5P)
4. $\frac{1350-1256}{\sqrt{15430}} = 0.7567$ (1.5P)
5. $s_{XY} = \frac{5}{4} \left(2501620 - \frac{6280}{5} \cdot \frac{9920}{5} \right) = 12145$ (2P)
6. $\rho_{XY} = \frac{12145}{\sqrt{15430 \cdot 14530}} = 0.8111$ (1P)
7. 728 (0.5P)
8. (a) $H_1 : \delta > 700$ (0.5P)
(b) $\frac{1}{4} \sum_{i=1}^5 (d_i - \bar{d})^2 = 5670$ (1P)
(c) $T_n = \sqrt{5} \cdot \frac{728-700}{\sqrt{5760}} = 0.8315$ (0.5P)
(d) $t_{0.95;4} = 2.132$ (0.5P)
(e) H_0 wird nicht abgelehnt. (0.5P)

Aufgabe 3

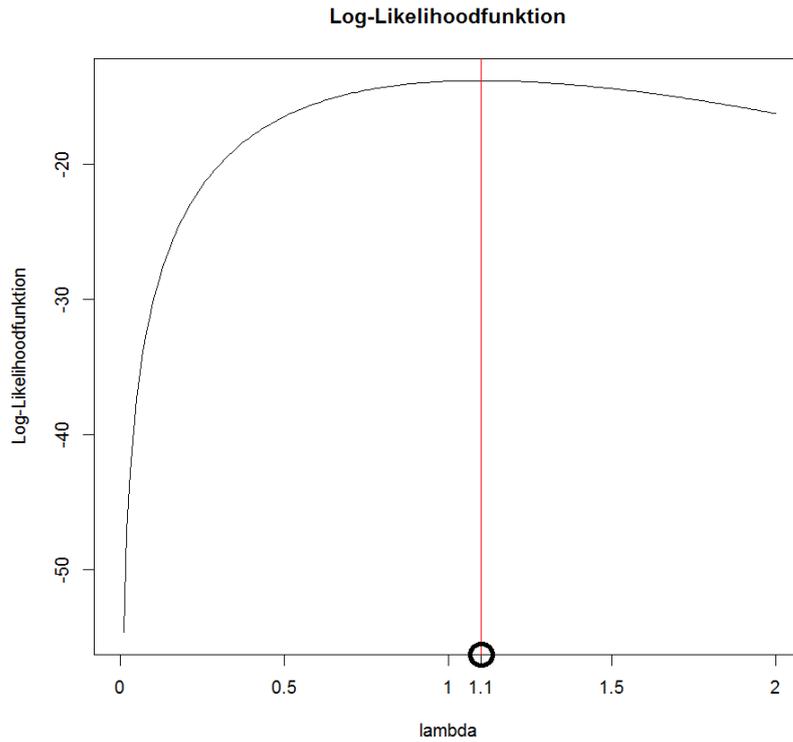
1. $E[10X] = 10\lambda_X = 10$. (0.5 P)
2.
 - Modus bei 0 und 1 (1 P)
 - Median bei 1, da $F_X(1) > 0.5$ und $F_X(0) < 0.5$. (0.5 P)
3. $P(X \geq 2) = 1 - F_X(1) = 0.2642$ (1 P)
4. $a = 100 \cdot f_X(0) = 36.7879$, $b = 100 \cdot f_X(1) = 36.7879$, $c = 6.4197 - 1.2524 - 4.0540 = 1.1133$. (1.5P)

i	X_i	n_i	np_i^0	$\frac{(n_i - np_i^0)^2}{np_i^0}$
1	$x_i = 0$	30	a	1.2524
2	$x_i = 1$	49	b	4.0540
3	$x_i \geq 2$	21	26.4241	c

5. $\chi_{0.9;2}^2 = 4.61$. (0.5P)
6. Da $6.4197 > 4.61$ lehne H_0 ab. (0.5P)



7. (1P)
8. $\hat{\lambda}_{MM} = 10^{-1} \sum_{i=1}^{10} x_i = 1.1$ (1P)



9.

(0.5)

10. $P(T_n > 11 | H_0 \text{ gilt}) = 1 - F_{Pois(\lambda=10)}(11) = 0.3032$ (1P)

11. Da $0.3032 > 0.0487$ lehne H_0 nicht ab. (0.5P)

12. Quantil aus Tabelle ablesen: $P(T_n > 15) = 0.0487$, d.h. kritische Schranke ist 15.
(0.5P)

Aufgabe 4

1. (z.B.) `hist(dat$Umsatz)` (1.0P)
2. mögliche Antworten: emp. Verteilungsfunktion, Kerndichteschätzung, Boxplot, Stem-Leaf-Diagramm (1.0P)
3. (z.B.) `tab=table(dat$Geschlecht,dat$Tarif)` (1.0P)
4. Flat (0.5P)
5. 0.5 (0.5P)
6. (a) 76.53975 (0.5P)
(b) 100 (0.5P)
(c) 53.37 (0.5P)
(d) Flat (0.5P)
7. (1.5P)

```
ml.est=function( stich ){
  negL=function( theta ,x){
    -sum(log( dexp (x, theta)))}
  nlm(negL,1,x=stich)}
```

8. (z.B.) `ml.est(dur)` (1.0P)
9. (a) Nullhypothese ablehnen, da p-Wert mit 0.056 kleiner als vorgegebene Irrtumsws. von $\alpha = 0.1$ (1.0P)
(b) Annahme, dass Stichprobe aus normalverteilter GG vorliegt, ist verletzt. (0.5P)