Friedrich-Alexander-Universität
Erlangen-Nürnberg

Lehrstuhl für Statistik und Ökonometrie

Diskussionspapier
86 / 2010

Unter verallgemeinerter Mittelwertbildung abgeschlossene Familien von Copulas

Ingo Klein

Lange Gasse 20 · D-90403 Nürnberg

Unter verallgemeinerter Mittelwertbildung abgeschlossene Familien von Copulas

Ingo Klein
Lehrstuhl für Statistik und Ökonometrie
Universität Erlangen-Nürnberg

Abstract

We will identify sufficient and partly necessary conditions for a family of copulas to be closed under the construction of generalized linear mean values. These families of copulas generalize results well-known from the literature for the Farlie-Gumbel-Morgenstern (FGM), the Ali-Mikhai-Haq (AMH) and the Barnett-Gumbel (BG) families of copulas closed under weighted linear, harmonic and geometric mean. For these generalizations we calculate the range of Spearman's ρ depending on the choice of weights α, the copulas generating function φ and the exponent γ determining what kind of mean value will be considered. It seems that FGM and AMH generating function $\varphi(u) = 1 - u$ maximizes the range of Spearman's ρ. Furthermore, it will be shown that the considered families of copulas closed under the construction of generalized linear means have no tail dependence in the sense of Ledford & Tawn.

Keywords and phrases: copula, generalized linear means, Spearman's ρ, tail dependence

1 Problemstellung

Verallgemeinerte lineare Mittelwerte spielen in der Statistik, in der Wahrscheinlichkeits- und in der Entscheidungstheorie als Aggregationsfunktionen eine große Rolle (siehe Grabisch et al. (2009)). Wenn z.B. n Messwerte $x_1, \ldots, x_n$ vorliegen, $g_1, \ldots, g_n \in \mathbb{R}$ nicht-negative Gewichte sind, die sich zu 1 aufsummieren und $u : [a, b] \to \mathbb{R}$ eine strikt monotone und stetige Funktion mit Inverser u^{-1} ist, heißt

$$u^{-1}\left(\sum_{i=1}^{n} u(x_i) g_i\right), \quad g_i \geq 0, \ \sum_{i=1}^{n} g_i = 1 \tag{1}$$

verallgemeinerter linearer Mittelwert (GLM) von $x_1, \ldots, x_n$. u heißt Erzeuger dieses Mittelwertes.

Wählt man $u(x) = x^\gamma$, $\gamma \neq 0$ als Erzeuger, so ergibt sich der gewichtete Potenzmittelwert. Für $\gamma = -1, 0, 1$ erhält man bekanntlich das gewichtete harmonische, geometrische bzw. arithmetische Mittel.

Mit diesen Mittelwerten lassen sich nicht nur Messwerte aggregieren, sondern auch (multivariate) Verteilungsfunktionen und hier speziell Copulas, die bekanntlich auf $[0, 1]^2$ restringierte Verteilungsfunktionen darstellen.

Wenn $C_1(u, v)$ und $C_2(u, v)$, $u, v \in [0, 1]$ zwei Copulas sind, dann ist

$$(\alpha C_1(u, v)^\gamma + (1 - \alpha) C_2(u, v)^\gamma)^{1/\gamma} \tag{2}$$

für alle $\gamma \neq 0$, $\alpha \in (0, 1)$ zwar eine auf $[0, 1]^2$ definierte Funktion. Für $\gamma \to 0$ geht diese Funktion in das gewichtete geometrische Mittel

$$C_1(u, v)^\alpha C_2^{1-\alpha} \tag{3}$$

der beiden Copulas über. Wenn (2) bzw. (3) wieder eine Copula ist, verfügt diese neben den spezifischen Copulaparametern von C_1 und C_2 mit γ und α über zwei weitere Parameter, die eine größere Flexibilität in der Abhängigkeitsmodellierung erlauben.

Ein systematischer Nachweis, dass (2) bzw. (3) eine Copula ist, wurde bislang nur für die Mittelung der Maximums- und der Unabhängigkeitscopula (siehe Fischer & Hinzmann (2007)) geführt. Auf der anderen Seite lassen sich leicht Beispiele konstruieren, dass zwei gewichtet gemittelte Copulas nicht wieder eine Copula ergeben, so dass die Suche nach Kriterien an die Copulas C_1 und C_2, so dass (2) bzw. (3) wieder eine Copula ist, eine nicht-triviale Aufgabe ist.

Diese Aufgabe wird deutlich vereinfacht, wenn man eine gewisse Abgeschlossenheitseigenschaft von Familien von Copulas gegenüber der Mittelwertbildung nachweisen kann. Man weiß dann, dass mit der Zugehörigkeit von C_1 und C_2 zu dieser Familie auch der gewichtete Potenzmittelwert von C_1 und C_2 wieder zu dieser Familie gehört und damit automatisch eine Copula ist.

In der Literatur werden solche Abgeschlossenheitsbedingungen zwar gelegentlich für spezielle Copulafamilien und Mittelwerte diskutiert (siehe z.B. Nelson (1999), S. 84). Es findet aber eine Beschränkung auf gewichte arithmetische, harmonische und geometrische Mittel statt. Somit stellt sich die Forschungsfrage, diese Ergebnisse so zu verallgemeinern, dass allgemein gefragt wird, wie Copulafamilien aussehen sollten, wenn diese Abgeschlossenheitsbedingung gegenüber der Bildung von gewichteten Potenzmittelwerten gelten soll.

Das Papier gliedert sich wie folgt. Nach einer kurzen überblicksartigen Einführung in die Terminologie von Copulas, werden Familien von potenziellen Copulafunktionen eingeführt, die die Eigenschaft besitzen, abgeschlossen gegenüber der Bildung von gewichteten Potenzmittelwerten zu sein. Dann wird anschließend untersucht, unter welchen Bedingungen diese potenziellen Copulafunktionen wirklich Copulas darstellen und welche Einschränkungen ggf. auch für den Abhängigkeitsparameter bzw. für die Wahl des Parameters des Potenzmittelwertes γ gemacht werden müssen. Abschließend werden auf Basis des Konstruktionsprinzips via Mittelwertbildung einige Vorschläge für neue Copulafamilien gemacht.

2 Copulas: Ein Überblick

Für eine umfassende Darstellung siehe zum Beispiel Joe (1997), Nelson (1999) oder Drouet-Mari & Kotz (2001). Wir geben nur einen kurzen Abriss mit den Eigenschaften von Copulas, die im Folgenden explizit benötigt werden.

Wir beschränken uns auf den bivariaten Fall. Wenn U und V über $[0,1]$ rechteckverteilte Zufallsvariablen sind, dann heißt die Restriktion der bivariaten Verteilungsfunktion auf das Einheitsquadrat

$$C(u,v) = P(U \leq u, V \leq v) \text{ für } u,v \in [0,1].$$

(bivariate) Copula. Zumeist wird eine Copula als eine Funktion von $[0,1]^2 \in [0,1]$ definiert, für die die Randbedingungen

$$C(u,0) = C(0,v) = 0,\ C(u,1) = u, C(1,v) = v,\ u,v \in [0,1] \tag{4}$$

und die moderaten Wachstumsbedingung

$$C(u_2,v_2) - C(u_1,v_2) - C(u_2,v_1) + C(u_1,v_1) \geq 0 \tag{5}$$

für $0 \leq u_1 < u_2 \leq 1$, $0 \leq v_1 < v_2 \leq 1$ erfüllt sind.

Wenn C zweimal differenzierbar ist, lassen sich neben den Randbedingungen noch weitere restringierende Eigenschaften finden. So sind die bedingten Wahrscheinlichkeiten

$$P(V \leq v | U \leq u) = \frac{C(u,v)}{u} \ \text{ und } \ P(U \leq u | V \leq v) = \frac{C(u,v)}{v} \tag{6}$$

und

$$\frac{\partial C(u,v)}{\partial u} = P(V \leq v | U = u) \geq 0 \ \text{ und } \ \frac{\partial C(u,v)}{\partial u} = P(V \leq v | U = u) \geq 0. \tag{7}$$

für $u,v \in [0,1]$ Funktionen von C und nehmen selbst Werte aus dem Bereich $[0,1]$ an, was ebenfalls das mögliche Aussehen von C beeinflusst. Schließlich kann die moderate Wachstumsbedingung (5) für zweimal differenzierbare Funktionen C durch die Forderung

$$c(u,v) = \frac{\partial^2 C(u,v)}{\partial u \partial v} \geq 0 \ \text{ für } u,v \in [0,1], \tag{8}$$

ersetzt werden. $c(u,v)$ gibt dann die sog. Copuladichte an.

3 Abgeschlossenheitseigenschaften

Nelson (1999) geht u.a. der Frage nach, ob für zwei Copulas eines bestimmten Bildungsgesetzes die Mittelung wieder zu einer Copula desselben Bildungsgesetzes gehört.

Betrachtet man das gewichtete arithmetische Mittel zweier Farlie-Gumbel-Morgenstern-Copulas

$$C_i(u,v) = uv + \theta_i u(1-u)(1-v), \ \ \theta_i \in [-1,1],\ i = 1,2, \tag{9}$$

dann liefert dieses Mittel

$$\alpha C_1(u,v) + (1-\alpha)C_2(u,v) = uv + \alpha(\theta_1 + (1-\alpha)\theta_2)u(1-u)v(1-v).$$

wieder eine Farlie-Gumbel-Morgenstern-Copula (im Folgenden FGM-Copula genannt).

Für das gewichtete geometrische Mittel von sog. Gumbel-Barnett-Copulas

$$C_i(u,v) = uv\exp(-\theta_i \ln u \ln v), \quad \theta_i \in (0,1], \; i = 1,2 \tag{10}$$

gilt ebenso, dass

$$C_1(u,v)^\alpha C_2(u,v)^{1-\alpha} = uv\exp(-(\alpha\theta_1 + (1-\alpha)\theta_2)\ln u \ln v).$$

wieder eine Gumbel-Barnett-Copula (im Folgenden GB-Copula genannt) ist.

Auch das gewichtete harmonische Mittel kann erfolgreich zur Konstruktion von Copulas eingesetzt werden. Betrachtet man zwei Ali-Mikhail-Haq-Copula (siehe Nelson (1999), S. 82)

$$C_i(u,v) = \frac{uv}{1-\theta_i(1-u)(1-v)}, \; \theta_i \in [-1,1], \quad i = 1,2, \tag{11}$$

dann ist das gewichtete harmomische Mittel

$$\left(\alpha\frac{1}{C_1(u,v)} + (1-\alpha)\frac{1}{C_2(u,v)}\right)^{-1} = \frac{uv}{1-(\alpha\theta_1 + (1-\alpha)\theta_2)(1-u)(1-v)}$$

wieder eine Ali-Mikhail-Haq-Copula (im Folgenden AMH-Copula genannt).

Diese drei Fälle sind Spezialfälle einer allgemeineren Klasse von Copulas, die ebenfalls über Abgeschlossenheitseigenschaften verfügen, wie die folgende Überlegung zeigt.

Sei $\varphi : [0,1] \to \mathbb{R}$ eine vorgegebene Funktion. Betrachtet man ausgehend von φ Funktionen C auf $[0,1]^2$ mit

$$C(u,v;\gamma,\theta) = uv(1+\theta\varphi(u)\varphi(v))^{1/\gamma} \; \text{ für } u,v \in [0,1], \tag{12}$$

für $\gamma \neq 0$. Für $\gamma = 0$ wird

$$C(u,v;\theta) = uv\exp(\theta\varphi(u)\varphi(v)) \; \text{ für } u,v \in [0,1] \tag{13}$$

gesetzt. Dann definieren

$$\mathcal{C}_{\varphi,\gamma} = \{C(.,.;\gamma,\theta) | \theta \in \Theta = [-1,1]\} \tag{14}$$

bzw.

$$\mathcal{C}_{\varphi} = \{C(.,.;\theta) | \theta \in \Theta \subseteq [-1,1]\} \tag{15}$$

für eine gegebene Wahl von φ durch den Abhängigkeitsparameter θ parametrisierte Familien potenzieller Copulas. [1]

Offensichtlich erhält man durch Wahl von $\varphi(u) = 1 - u$, $u \in [0,1]$ und für $\gamma = 1$ bzw. $\gamma = -1$ gerade die Familie der Farlie-Gumbel-Morgenstern- bzw. die der Ali-Mikhail-Haq-Copulas. Die Wahl von $\varphi(u) = \ln u$, $u \in [0,1]$ und die Setzung von $\gamma = 0$ führt zur Familie der Barnett-Gumbel-Copulas, wenn der Parameterbereich auf $\Theta = [-1, 0)$ eingeschränkt wird. Cuadras (2009) diskutiert auch die kombinierte Wahl von $\varphi(u) = 1 - u$, $u \in [0,1]$ und $\gamma = 0$.

Wenn φ und γ derart gewählt werden, dass (14) und (15) parametrische Familien von Copulas sind, dann lässt sich nachweisen, dass diese abgeschlossen sind bez. der Bildung gewichteter Potenzmittelwerte.

Satz 1 1. *Seien $\varphi : [0,1] \to \mathbb{R}$ und $\gamma \neq 0$ derart gewählt, dass*

$$C_i(u, v; \gamma) = uv(1 + \theta_i \varphi(u)\varphi(v))^{1/\gamma} \text{ für } u, v \in [0,1]$$

für $\theta_i \in [-1,1]$, eine Copula $i = 1,2$ ist. Dann hat der gewichtete Potenzmittelwert von C_1 und C_2

$$(\alpha C_1(u, v; \gamma)^\gamma + (1-\alpha) C_2(u, v; \gamma)^\gamma)^{1/\gamma} \quad \text{für } u, v \in [0,1]$$

für $\alpha \in [0,1]$ wieder dieselbe Form mit Parameter $\alpha\theta_1 + (1-\alpha)\theta_2$, d.h.

$$C(u, v; \gamma, \alpha\theta_1 + (1-\alpha)\theta_2) = uv(1 + (\alpha\theta_1 + (1-\alpha)\theta_2)\varphi(u)\varphi(v))^{1/\gamma} \text{ für } u, v \in [0,1].$$

2. *Wenn $\varphi : [0,1] \to \mathbb{R}$ derart gewählt wird, dass*

$$C_i(u, v; \theta_i) = uv \exp(\theta_i \varphi(u)\varphi(v)) \text{ für } u, v \in [0,1]$$

für $\theta_i \in [-1,1]$, $i = 1,2$ eine Copula ist. Dann hat das gewichtete geometrische Mittel von C_1 und C_2

$$\exp\left(\alpha \ln C_1(u, v) + (1-\alpha) \ln C_2(u, v)\right)$$

für $\alpha \in [0,1]$ wieder dieselbe Form mit Parameter $\alpha\theta_1 + (1-\alpha)\theta_2$, d.h.

$$C(u, v; \alpha\theta_1 + (1-\alpha)\theta_2) = uv \exp((\alpha\theta + (1-\alpha)\theta_2)\varphi(u)\varphi(v)) \quad u, v \in [0,1].$$

[1] Für (13) können auch nicht beschränkte Funktionen φ betrachtet werden. Dann ist aber $\Theta = [-1, 0)$.

Beweis:

1. Die Aussage gilt wegen

$$\alpha \left(uv(1+\theta_1\varphi(u)\varphi(v))^{1/\gamma}\right)^\gamma + (1-\alpha)\left(uv(1+\theta_2\varphi(u)\varphi(v))^{1/\gamma}\right)^\gamma$$
$$= uv^\gamma(1+(\alpha\theta_1+(1-\alpha)\theta_2)\varphi(u)\varphi(v))$$

   für $u, v \in [0,1]$, $\alpha \in [0,1]$, $\theta \in [-1,1]$.

2. Analog. □

Die Aufgabe besteht nun lediglich darin, hinreichende und möglichst auch notwendige Bedingungen an die Funktion φ und die Wahl von γ zu finden, so dass (12) bzw. (13) für alle $\theta \in [-1,1]$ bzw. $\theta \in [-1,0]$ eine Copula ist. Dann sind auch die betrachteten gewichteten Potenzmittelwerte wieder Copulas.

Amblard & Girard (2002, 2003) diskutieren solche Eigenschaften für den Spezialfall $\gamma = 1$. Sie betrachten allerdings die Darstellung

$$C(u,v;\gamma=1,\theta) = uv + \theta\phi(u)\phi(v) \quad u,v \in [0,1] \tag{16}$$

und geben hinreichende und notwendige Bedingungen für ϕ an, damit (16) die Eigenschaften einer Copula hat. In diesem Spezialfall ist die moderate Wachstumsbedingung (5) ohne Rückgriff auf Differenzierbarkeitsforderungen explizit nachweisbar. Der Zusammenhang zwischen φ und ϕ lautet

$$\phi(u) = u\varphi(u) \quad u \in [0,1].$$

Die von Amblard & Girard (2002, 2003) abgeleiteten Bedingungen für differenzierbare ϕ sind vor allem:

1. $\phi(u) \le \min(u, 1-u)$, d.h. $\varphi(u) \le 1$ und
2. $|\phi'(u)| = |\varphi(u) + u\varphi'(u)| \le 1$

für $u \in [0,1]$. Diese Bedingungen werden in modifizierter Form im Folgenden wieder auftreten, wenn die Bedingungen hergeleitet werden, dass (12) bzw. (13) Copulas sind.

Zuvor wird aber noch untersucht, wie die Parameter γ und θ bei der Eigenschaft der jeweiligen Copula, positive bzw. negative Abhängigkeit im Sinne von Lehmann (1966) aufzuweisen, zusammenspielen. Zudem wird die Beschränkung auf Copulas der Form (12) bzw. (13), in denen eine positive bzw. negative Abhängigkeit vorliegt, Auswirkungen auf die Möglichkeit der Wahl von φ haben.

4 Abhängigkeitseigenschaft

Eine Copula $C(u, v)$ besitzt die Eigenschaft der positiven (negativen) Abhängigkeit (siehe Lehmann (1966)), wenn

$$C(u, v) - uv \geq (\leq) 0 \;\; u, v \in [0, 1]$$

ist.

Für Funktionen der Form (12) bzw. (13) spezifiziert der Parameter θ je nach Wahl von γ und φ unterschiedliche Formen der Abhängigkeit, sofern φ auf $[0, 1]$ kein wechselndes Vorzeichen besitzen.

Satz 2 *Sei $\varphi : [0, 1] \to \mathbb{R}$ auf $[0, 1]$ entweder überall nicht-negativ oder überall nicht-positiv.*

1. *Sei $C(u, v; \gamma, \theta)$ entsprechend (12) für geeignete $\gamma \neq 0$ und alle $\theta \in [-1, 1]$ eine Copula, dann besitzt $C(u, v; \gamma, \theta)$ die Eigenschaft der positiven (negativen) Abhängigkeit, wenn $\gamma\theta > 0$ ($\gamma\theta < 0$) ist.*

2. *Sei $C(u, v; \theta)$ entsprechend (13) für alle $\theta \in [-1, 0]$ eine Copula, dann besitzt $C(u, v; \theta)$ die Eigenschaft der positiven (negativen) Abhängigkeit, wenn $\gamma\theta > 0$ ($\gamma\theta < 0$) ist.*

Beweis:

1. Sei $\gamma > 0$.

   Wenn $\theta > 0$, dann ist $(1 + \theta\varphi(u)\varphi(v)) \geq 1$ für $u, v \in [0, 1]$, woraus

   $$C(u, v; \gamma, \theta) = uv(1 + \theta\varphi(u)\varphi(v))^{1/\gamma} \geq uv \;\; u, v \in [0, 1]$$

   folgt, was im Sinne der Lehmann-Abhängigkeit eine positive Abhängigkeit bedeutet.

   Entsprechend liegt für $\theta < 0$ eine negative Abhängigkeit vor.

   Wenn $\gamma < 0$ ist, kehrt sich die Situation um. Dann ist

   $$(1 + \theta\varphi(u)\varphi(v))^{|1/\gamma|} \leq 1$$

   wenn $\theta < 0$ ist. Damit liegt eine positive Abhängigkeit wegen

   $$C(u, v; \gamma) = \frac{uv}{(1 + \theta\varphi(u)\varphi(v))^{|1/\gamma|}} \geq uv \;\; u, v \in [0, 1],$$

   vor, wenn $\theta < 0$ ist. Umgekehrt führt $\theta > 0$ zu negativer Abhängigkeit.

2. Analog. □

Umgekehrt kann man sehr leicht zeigen, dass von der Eigenschaft der positiven bzw. negativen Abhängigkeit darauf geschlossen werden kann, dass φ auf $[0,1]$ kein wechselndes Vorzeichen besitzen darf.

Wenn also vernünftigerweise gefordert wird, dass die potenzielle Copula (12) bzw. (13) eine eindeutig definierte Abhängigkeitseigenschaft besitzen soll, schränkt dies die Wahl potenzieller Funktionen φ insofern ein, als dass diese auf $[0,1]$ kein wechselndes Vorzeichen besitzen sollten.

5 Copula-Bedingungen für $\gamma \neq 0$

Wir diskutieren zunächst nur den Fall von Funktionen $C(.,.;\gamma,\theta)$ der Form (12).

5.1 Randbedingungen

Da für jede Copula $C(u,1) = u$ und $C(1,v) = v$ gilt, folgt für (12), dass

$$\varphi(1) = 0 \tag{17}$$

sein muss.

Weiterhin ist $C(0,v) = C(0,v) = 0$ für $u,v \in [0,1]$. Damit muss

$$\lim_{u\to 0} uv(1+\theta\varphi(u)\varphi(v))^{1/\gamma} = 0$$

sein.

Für $\gamma > 0$ sichert dann die Bedingung

$$\lim_{u\to 0} u^\gamma \varphi(u) = 0,$$

dass $C(0,v;\gamma,\theta) = 0$ ist. Diese Bedingung ist z.B. auch für $\varphi(u) = \ln u$ erfüllt.

Wenn $\gamma < 0$ ist, liefert die Beschränktheit von φ eine hinreichende Bedingung, damit $C(0,v;\gamma,\theta) = 0$ ist.

Da prinzipiell $\gamma \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ zugelassen werden, muss

$$1 + \theta\varphi(u)\varphi(v) \geq 0 \quad u,v \in [0,1]$$

sein, damit

$$(1+\theta\varphi(u)\varphi(v))^{1/\gamma} \;\; u,v \in [0,1]$$

reellwertig bleibt. Für $\theta = -1$ und $u = v$ heißt dies, dass

$$\varphi(u)^2 \leq 1 \;\text{ bzw. }\; |\varphi(u)| \leq 1 \;\; u \in [0,1] \tag{18}$$

sein muss. Wenn $1/\gamma$ eine ganze Zahl ist, sind auch Funktionen φ zugelassen, die nicht diese Beschränktheitseigenschaft (wie z.B. $\varphi(u) = \ln u$) aufweisen.

Beispiel 1 *Eine beliebte Wahl ist bekanntlich $\varphi(u) = 1-u$. Andere Spezifikationen können z.B. $\varphi(u) = 1-u^k$, $k > 0$ sein.*

5.2 Bedingung aufgrund der bedingten Wahrscheinlichkeiten

Zu beachten ist, dass für jede differenzierbare Copula C

$$\frac{\partial \ln C(u,v)}{\partial u} = \frac{\partial C(u,v)/\partial u}{C(u,v)} = \frac{P(V \leq v | U = u)}{C(u,v)} \geq 0 \;\; u,v \in [0,1]$$

sein muss (siehe Nelson (1999), S. 11). Weitere notwendige Bedingungen lassen sich somit aus der Nichtnegativität dieser partiellen Ableitung herleiten.

Für $C(u,v;\gamma,\theta)$, $\gamma \neq 0$ sind

$$\ln C(u,v;\gamma,\theta) = \ln u + \ln v + 1/\gamma \ln(1+\theta\varphi(u)\varphi(v))$$

und

$$\frac{\partial \ln C(u,v;\gamma,\theta)}{\partial u} = \frac{1}{u} + \frac{1}{\gamma}\frac{\theta\varphi'(u)\varphi(v)}{1+\theta\varphi(u)\varphi(v)} \tag{19}$$

$$= \frac{1+\theta\varphi(v)(\varphi(u)+1/\gamma u\varphi'(u))}{u(1+\theta\varphi(u)\varphi(v))} \tag{20}$$

für $u,v \in [0,1]$.

Da laut (**??**) der Nenner stets nicht-negativ und beschränkt ist, muss die Nichtnegativität des Zählers sichergestellt werden.

Da $|\varphi(v)| \leq 1$ für $v \in [0,1]$ sein muss, ist

$$|\varphi(u) + 1/\gamma u\varphi'(u)| \leq 1 \;\; u \in [0,1] \tag{21}$$

zu fordern, damit der Zähler nicht-negativ ist. Dies führt dazu, dass auch $u\varphi'(u)$ eine auf $[0,1]$ beschränkte Funktion sein muss, was zum Beispiel die folgenden Setzungen von φ ausschließt.

Beispiel 2 *Sei*
$$\varphi(u) = \sqrt{1-u^2} \;\; u \in [0,1].$$
diese Funktion ist auf $[0,1]$ *monoton abnehmend und konkav mit* $\varphi(1) = 0$. *Es ist aber*
$$u\varphi'(u) = -\frac{2u^2}{\sqrt{1-u^2}}$$
für $u \to 1$ *unbeschränkt. Analoges gilt für die auf* $[0,1]$ *monoton abnehmende und konvexe Funktion*
$$\varphi(u) = 1 - \sqrt{1-(1-u)^2} \;\; u \in [0,1].$$
für $u \to 0$.

Die Bedingung (21) schränkt die Wahlmöglichkeiten für Werte von γ ein, wie das folgende Lemma zeigt:

Lemma 1 *Sei* $u \in [0,1]$ *derart, dass* $\varphi'(u) > 0$ *gilt. Dann ist*
$$|\varphi(u) + 1/\gamma u\varphi'(u)| \leq 1 \iff \frac{-1+\varphi(u)}{u\varphi'(u)} \leq \frac{1}{\gamma} \leq \frac{1-\varphi(u)}{u\varphi'(u)}. \tag{22}$$
Sei $\in [0,1]$ *derart, dass* $\varphi'(u) < 0$ *gilt. Dann ist*
$$|\varphi(u) + 1/\gamma u\varphi'(u)| \leq 1 \iff \frac{1-\varphi(u)}{u\varphi'(u)} \leq \frac{1}{\gamma} \leq \frac{-1+\varphi(u)}{u\varphi'(u)}. \tag{23}$$

Beweis: Einfache algebraische Umformungen. □

Sei φ gegeben. Dann bezeichnet G_φ die Menge aller Werte von γ, so dass die Grenzen (22) und (23) für alle $u \in [0,1]$ eingehalten werden. D.h.
$$G_\varphi = \{\gamma \neq 0 || \varphi(u) + 1/\gamma u\varphi'(u)| \leq 1 \;\; u \in [0,1]\}. \tag{24}$$

Dabei muss nicht notwendigerweise $G_\varphi \neq \emptyset$ gelten, wie das Beispiel 2 zeigt.

Zu beachten ist, dass die Ausdrücke
$$-\frac{u\varphi(u)}{1-\varphi(u)} \;\text{ bzw. }\; \frac{u\varphi'(u)}{-1+\varphi(u)}$$
die Elastizität der Funktion $1-\varphi$ bzw. $-1+\varphi$ an der Stelle u für $u \in [0,1]$ messen. Im folgenden Beispiel wird eine Funktion φ mit konstanter Elastizität betrachtet, für die die Grenzen für $1/\gamma$ besonders leicht zu bestimmen sind.

Beispiel 3 *Betrachte wiederum*

$$\varphi(u) = 1 - u^k, \;\; u \in [0,1], \; k > 0 \tag{25}$$

Dann sind $\varphi'(u) = -ku^{k-1} \leq 0$ *und*

$$\frac{1-\varphi(u)}{u\varphi'(u)} = \frac{-1}{k} \;\; u \in [0,1],$$

so dass

$$-\frac{1}{k} \leq \frac{1}{\gamma} \leq \frac{1}{k} \tag{26}$$

ist. Für $k = 1$ *sind die Grenzen* $\gamma = 1$ *bzw.* $\gamma = -1$ *durch die FGM- bzw. AMH-Copula gegeben. Offensichtlich kann es nur innerhalb dieser Grenzen für* $\varphi(u) = 1 - u$, $u \in [0,1]$ *eine Copula der Form (12) geben.*

Beispiel 4 *Konstante Elastizität ergibt sich auch für*

$$\varphi(u) = \min\left(1, \frac{1}{u^k} - 1\right), \;\; u \in [0,1], \; k > 0.$$

Es ist

$$u\varphi'(u) = \begin{cases} 0 & \textit{für } u < (1/2)^{1/k} \\ -ku^{-k} & \textit{für } u < (1/2)^{1/k}. \end{cases}$$

Für $u < (1/2)^{1/k}$ *ist*

$$|\varphi(u) + \frac{1}{\gamma}u\varphi'(u)| = 1 \leq 1$$

stets erfüllt. Damit restringiert für $u > (1/2)^{1/k}$

$$\frac{1-\varphi(u)}{u\varphi'(u)} = -\frac{1}{k} \leq \frac{1}{\gamma} \leq \frac{-1+\varphi(u)}{u\varphi'(u)} = \frac{1}{k}$$

für $u > (1/2)^{1/k}$ *den Wertebereich von* $1/\gamma$.

Beispiel 5 *Mit*

$$\varphi(u) = e^{-u} - e^{-1} \;\; u \in [0,1] \tag{27}$$

wird eine Funktion mit variabler Elastizität betrachtet. Die Untergrenze für $1/\gamma$ *lautet*

$$\frac{1-\varphi(u)}{u\varphi'(u)} = \frac{1-e^{-u}+e^{-1}}{-ue^{-u}} = \frac{1}{u} + \frac{1+e^{-1}}{-ue^{-u}}$$

und besitzt für $u = 0.5979717$ *ein Maximum der Höhe* -2.487390*, wie sich numerisch ermitteln lässt.*

Weiterhin ist

$$\frac{-1+\varphi(u)}{u\varphi'(u)} = \frac{-1+e^{-u}-e^{-1}}{-ue^{-u}} = -\frac{1}{u} + \frac{-1-e^{-1}}{-ue^{-u}}$$

monoton abnehmend auf $[0,1]$*, so dass das Minimum der Obergrenze für* $1/\gamma$ *für* $u=1$ *angenommen wird, womit*

$$-2.48739 \le \frac{1}{\gamma} \le 2.718282 = e \tag{28}$$

sein muss.

Beispiel 6 *Es lassen sich aber auch auf* $[0,1]$ *nicht monotone Funktionen betrachten wie z.B.*

$$\varphi(u) = u(1-u) \ \ u \in [0,1].$$

Es ist $\varphi'(u) = 1-2u$ *negativ für* $u > 1/2$ *und positiv für* $u < 1/2$.

Dann lässt sich leicht zeigen, dass für $u < 1/2$ *(22) in*

$$\frac{-1+u(1-u)}{u(1-2u)} \le -6.464 \le \frac{1}{\gamma} \le 6.464 \le \frac{1-u(1-u)}{u(1-2u)}$$

und für $u > 1/2$ *(23) in*

$$\frac{-1+u(1-u)}{u(1-2u)} \le 0 \le \frac{1}{\gamma} \le 1 \le \frac{1-u(1-u)}{u(1-2u)}$$

übergehen. Somit muss insgesamt

$$0 \le \frac{1}{\gamma} \le 1$$

sein.

5.3 Moderate Wachstumsbedingung

5.3.1 Fall: φ monoton und $\theta\gamma > 0$

Bislang wurden die notwendigen Bedingungen

1. $\varphi(1) = 0$,
2. $|\varphi(u)| \le 1$, $u \in [0,1]$ und

3. $|\varphi(u) + 1/\gamma u\varphi'(u)| \leq 1,\ u \in [0,1]$

identifiziert. Zu prüfen ist, welche zusätzlichen Bedingungen gebraucht werden, damit die zweite gemischte Ableitung $c(.,.,\gamma,\theta)$ der potenziellen Copula $C(.,.,\gamma,\theta)$ nicht-negativ und damit eine Copuladichte ist. Zwischen dieser und der zweiten gemischten Ableitung der logarithmierten potentiellen Copula besteht der enge Zusammenhang

$$\frac{c(u,v;\gamma,\theta)}{C(u,v;\gamma,\theta)} = \frac{\partial^2 \ln C(u,v;\gamma,\theta)}{\partial u \partial v} + \frac{\partial \ln C(u,v;\gamma,\theta)}{\partial u}\frac{\partial \ln C(u,v;\gamma,\theta)}{\partial v}, \quad u,v \in [0,1]. \tag{29}$$

Die Bedingung (21) hatte zum Ziel sicherzustellen, dass

$$\frac{\partial \ln C(u,v;\gamma,\theta)}{\partial u} \geq 0 \ \text{ und } \ \frac{\partial \ln C(u,v;\gamma,\theta)}{\partial v} \geq 0 \ \ u,v \in [0,1]$$

sind. Wenn zusätzlich noch

$$\frac{\partial^2 \ln C(u,v;\gamma,\theta)}{\partial u \partial v} \geq 0 \ \ u,v \in [0,1] \tag{30}$$

gilt, dann ist $c(u,v;\gamma,\theta) \geq 0$ für $u,v \in [0,1]$ und $C(.,.;\gamma,\theta)$ eine Copula. [2]

Damit ergibt sich für monotone Funktionen φ als hinreichende Copulabedingung für $C(.,.;\gamma,\theta)$, dass $\gamma\theta > 0$ sein muss, wie der folgende Satz zeigt:

Satz 3 *Sei* $\varphi : [0,1] \to \mathbb{R}$ *eine auf* $[0,1]$ *monotone und differenzierbare Funktion, die die Bedingungen*

1. $\varphi(1) = 0$,

2. $|\varphi(u)| \leq 1$ *für* $u \in [0,1]$,

3. $G_\varphi \neq \emptyset$ *mit*

$$G_\varphi = \{g \neq 0 | |\varphi(u) + 1/\gamma u\varphi'(u)| \leq 1,\ u \in [0,1]\},$$

erfüllt.

[2]Die Eigenschaft (30) sichert, dass (12) eine maximal unendlich teilbare Verteilungsfunktion ist, für die $C(.,.;\gamma))^r$, $r > 0$ wieder eine Verteilungsfunktion ergibt (siehe Joe (1997), S. 32f.).

Dann ist

$$C(u, v; \gamma, \theta) = uv(1 + \theta\varphi(u)\varphi(v))^{1/\gamma} \quad u, v \in [0, 1], \; g \in G_\varphi, \; \theta \in [-1, 1]$$

eine Copula, wenn für $g \in G_\varphi$ und $\theta \in [-1, 1]$ gilt:

$$\gamma\theta > 0. \tag{31}$$

Beweis: Nach wenigen Rechenschritten erhält man

$$\frac{\partial \ln C(u, v; \gamma, \theta)}{\partial u \partial v} = \frac{1}{\gamma} \frac{\theta\varphi'(u)\varphi'(v)}{(1 + \theta\varphi(u)\varphi(v))^2}. \tag{32}$$

Wenn φ monoton ist und damit das Vorzeichen der Ableitung von φ nicht wechselt, ist

$$\frac{\partial \ln C(u, v; \gamma, \theta)}{\partial u \partial v} \geq 0 \quad u, v \in [0, 1].$$

falls $\gamma\theta \geq 0$ ist. □

Für $\gamma > 0$ muss dann $\theta \geq 0$ sein, was eine positive Abhängigkeit induziert. Umgekehrt ergibt sich für $\gamma < 0$ mit $\theta \leq 0$ ebenfalls eine positive Abhängigkeit. Somit ist in diesem Falle besonders leicht nachzuweisen, ob Funktionen der Form (12) Copulas sind.

Beispiel 7 *Die Funktion*

$$C(u, v; \gamma, \theta) = uv(1 + \theta(1 - u^k)(1 - v^k))^{1/\gamma} \quad u, v \in [0, 1]$$

mit $k > 0$ ist eine Copula für

1. $0 < \theta \leq 1$ *und* $0 < 1/\gamma \leq 1/k$ *und*
2. $-1 \leq \theta \leq 0$ *und* $-1/k \leq 1/\gamma < 0$.

Für $k = 1$ muss $0 < \theta \leq 1$ und $0 < \gamma \leq 1$ bzw. $-1 \leq \theta < 0$ und $-1 \leq \gamma < 0$ sein, was somit als Grenzfälle für $\gamma = 1$ die FGM-Copula bzw. für $\gamma = -1$ die AMH-Copula einschließt. Dasselbe Ergebnis erhält man für $\varphi(u) = u^k - 1$, $u \in [0, 1]$.

Beispiel 8 *Die Funktion*

$$C(u, v; \gamma, \theta) = uv(1 + \theta(e^{-u} - e^{-1})(e^{-v} - e^{-1}))^{1/\gamma} \quad u, v \in [0, 1]$$

ist eine Copula für

1. $0 < \theta \leq 1$ *und* $0 < 1/\gamma \leq 2.718282$ *und*
2. $-1 \leq \theta \leq 0$ *und* $-2.487390 \leq 1/\gamma < 0$.

5.3.2 Fall: φ monoton und $\gamma\theta < 0$

Setzt man die Ausdrücke (20) und (32) für die Ableitungen der logarithmierten Copula ein, so ist

$$\frac{c(u,v;\gamma,\theta)}{C(u,v;\gamma,\theta)} = \frac{Z}{uv(1+\theta\varphi(u)\varphi(v))^2} \quad u,v \in [0,1]$$

mit

$$Z = \frac{\theta}{\gamma} uv\varphi'(u)\varphi'(v) \tag{33}$$
$$+(1+\theta\varphi(v)(\varphi(u)+1/\gamma u\varphi'(u)))(1+\theta\varphi(u)(\varphi(v)+1/\gamma v\varphi'(v))) \tag{34}$$

für $u, v \in [0,1]$. Offensichtlich ist $c(.,.;\gamma,\theta)$ für gegebene γ und $\theta \in [-1,1]$ eine Copuladichte genau dann, wenn $Z \geq 0$ für alle $u,v \in [0,1]$ ist.

Als eine der Bedingungen dafür, dass (12) für $\theta \in [-1,1]$ eine Copula ist, wird von der Monotonie der Funktion φ ausgegangen. Da $\varphi(1) = 0$ ist, setzt dies voraus, dass die Funktion auf $[0,1]$ entweder nicht-negativ und monoton abnehmend oder nicht-positiv und monoton zunehmend ist. Im Falle, dass φ nicht über die Eigenschaft der Monotonie verfügt, sind keine allgemeingültigen Aussagen ableitbar. Es muss dann für jede Funktion φ einzeln diskutiert werden, ob sie eine Copula generiert oder nicht.

Der folgende Satz nennt hinreichende Bedingungen, unter denen $C(.,.;\gamma,\theta)$ für bestimmte $\gamma \neq 0$ eine Copula ist.

Satz 4 *Sei $\varphi : [0,1] \to \mathbb{R}$ eine auf $[0,1]$ monotone und differenzierbare Funktion, die die Bedingungen*

1. $\varphi(1) = 0$,
2. $|\varphi(u)| \leq 1$ *für* $u \in [0,1]$,
3. $G_\varphi \neq \emptyset$ *mit*

$$G_\varphi = \{g \neq 0 | |\varphi(u) + 1/\gamma u\varphi'(u)| \leq 1,\ u \in [0,1]\},$$

4. φ *nicht-negativ, monoton abnehmend oder nicht-positiv, monoton zunehmend auf* $[0,1]$.

erfüllt.

Dann ist

$$C(u,v;\gamma,\theta) = uv(1+\theta\varphi(u)\varphi(v))^{1/\gamma} \quad u,v \in [0,1],\ g \in G_\varphi,\ \theta \in [-1,1]$$

eine Copula, wenn für $g \in G_\varphi$ *und* $\theta \in [-1,1]$ *gelten:*

$$\gamma\theta < 0 \tag{35}$$

und

$$\frac{1}{\sqrt{|\gamma|}} \geq \frac{1}{|\gamma|} \quad \textit{(d.h. } |\gamma| \geq 1\textit{).} \tag{36}$$

Beweis: Zu zeigen, dass für $u,v \in [0,1]$

$$Z = \frac{\theta}{\gamma}u\varphi'(u)v\varphi'(v) + (1+\theta\varphi(v)[\varphi(u)+\frac{1}{\gamma}u\varphi'(u)])((1+\theta\varphi(u)[\varphi(v)+\frac{1}{\gamma}v\varphi'(v)]) \geq 0$$

gilt.

Es ist eine Fallunterscheidung nötig, die positive Werte von γ mit negativen Werten von θ kombiniert und umgekehrt, um alle Fälle abzudecken, in denen $\gamma\theta < 0$ ist. Zudem ist jeweils zu unterscheiden, ob φ nicht-negativ, monoton abnehmend oder nicht-positiv, monoton zunehmend auf $[0,1]$ ist.

1. Seien $\gamma < 0$ und $0 < \theta \leq 1$.

   (a) Fall: $\varphi(u) > 0$, $\varphi'(u) < 0$ für $u \in [0,1]$:
   Aus (23) ist bekannt, dass

   $$\frac{1-\varphi(u)}{u\varphi'(u)} \leq \frac{1}{\gamma} \Rightarrow 1-\varphi(u) \geq \frac{1}{\gamma}u\varphi'(u), \quad u \in [0,1] \tag{37}$$

   gilt.
   Mit den Voraussetzungen sind $\varphi(u) + 1/\gamma u\varphi'(u) \geq 0$ und $\theta\varphi(v) \geq 0$ für $u,v \in [0,1]$, so dass

   $$\begin{aligned} 1+\theta\varphi(v)[\varphi(u)+\frac{1}{\gamma}u\varphi'(u)] &\geq 1 \geq 1-\varphi(v) \\ &\geq \frac{1}{\gamma}v\varphi'(v) \ \text{ wegen (37)} \\ &\geq -\frac{1}{\sqrt{|\gamma|}}v\varphi'(v) \ \text{ wegen (36)} \\ &\geq -\frac{\sqrt{\theta}}{\sqrt{|\gamma|}}v\varphi'(v) \ \text{ wegen } 0 < \theta \leq 1 \end{aligned}$$

für $u, v \in [0,1]$ gilt.

Damit ist

$$
\begin{aligned}
-\frac{\theta}{\gamma} u\varphi'(u) v\varphi'(v) &\le \left(-\frac{\sqrt{\theta}}{\sqrt{|\gamma|}} v\varphi'(v)\right)\left(-\frac{\sqrt{\theta}}{\sqrt{|\gamma|}} u\varphi'(u)\right) \\
&\le (1+\theta\varphi(v)[\varphi(u)+\frac{1}{\gamma}u\varphi'(u)]) \\
&\quad \cdot((1+\theta\varphi(u)[\varphi(v)+\frac{1}{\gamma}v\varphi'(v)])
\end{aligned}
$$

für $u, v \in [0,1]$, woraus $Z \ge 0$ folgt.

(b) Fall: $\varphi(u) < 0$, $\varphi'(u) > 0$ für $u \in [0,1]$:

Aus (22) folgt:

$$
\frac{-1+\varphi(u)}{u\varphi'(u)} \le \frac{1}{\gamma} \Rightarrow 1+\varphi(u) \ge -\frac{1}{\gamma}u\varphi'(u), \quad u \in [0,1] \tag{38}
$$

Nun sind mit den getroffenen Annahmen $\varphi(u) + 1/\gamma u\varphi'(u) \le 0$ und $\theta\varphi(v) \le 0$ für $u, v \in [0,1]$, so dass

$$
\begin{aligned}
1+\theta\varphi(v)[\varphi(u)+\frac{1}{\gamma}u\varphi'(u)] &\ge 1 \ge 1+\varphi(v) \\
&\ge -\frac{1}{\gamma}v\varphi'(v) \;\text{ wegen (38)} \\
&\ge \frac{1}{\sqrt{|\gamma|}}v\varphi'(v) \;\text{ wegen (36)} \\
&\ge \frac{\sqrt{\theta}}{\sqrt{|\gamma|}}v\varphi'(v) \;\text{ wegen } 0 < \theta \le 1
\end{aligned}
$$

für $u, v \in [0,1]$ gilt.

Dies führt zu der Abschätzung

$$
\begin{aligned}
-\frac{\theta}{\gamma} u\varphi'(u) v\varphi'(v) &\le \left(\frac{\sqrt{\theta}}{\sqrt{|\gamma|}} v\varphi'(v)\right)\left(\frac{\sqrt{\theta}}{\sqrt{|\gamma|}} u\varphi'(u)\right) \\
&\le (1+\theta\varphi(v)[\varphi(u)+\frac{1}{\gamma}u\varphi'(u)]) \\
&\quad \cdot((1+\theta\varphi(u)[\varphi(v)+\frac{1}{\gamma}v\varphi'(v)])
\end{aligned}
$$

für $u, v \in [0,1]$, woraus wiederum $Z \ge 0$ folgt.

2. $\gamma > 0$, $-1 \le \theta < 0$.

(a) Fall: $\varphi(u) > 0$, $\varphi'(u) < 0$ für $u \in [0,1]$.

In diesem Falle folgt aus (23), dass

$$\frac{1}{\gamma} \leq \frac{-1+\varphi(u)}{u\varphi'(u)} \Rightarrow 1-\varphi(u) \geq -\frac{1}{\gamma}u\varphi'(u), \quad u \in [0,1] \tag{39}$$

gilt. Nun kann $\varphi(u) + 1/\gamma u\varphi'(u)$ auf $[0,1]$ ein wechselndes Vorzeichen besitzen, so dass eine weitere Fallunterscheidung nötig ist.

i. Sei $u \in [0,1]$ derart, dass $\varphi(u) + 1/\gamma u\varphi'(u) \leq 0$ ist. Dies führt dazu, dass $\theta\varphi(v)[\varphi(u)+1/\gamma u\varphi'(u)] \geq 0$ für $v \in [0,1]$ ist, so dass die folgende Abschätzung gilt:

$$\begin{aligned}
1+\theta\varphi(v)[\varphi(u)+\frac{1}{\gamma}u\varphi'(u)] &\geq 1 \geq 1-\varphi(v) \\
&\geq -\frac{1}{\gamma}v\varphi'(v) \text{ wegen (39)} \\
&\geq -\frac{1}{\sqrt{\gamma}}v\varphi'(v) \text{ wegen (36)} \\
&\geq -\frac{\sqrt{|\theta|}}{\sqrt{\gamma}}v\varphi'(v) \text{ wegen } -1 \leq \theta < 0
\end{aligned}$$

für $v \in [0,1]$.

Damit ist

$$\begin{aligned}
-\frac{\theta}{\gamma}u\varphi'(u)v\varphi'(v) &\leq \left(-\frac{\sqrt{|\theta|}}{\sqrt{\gamma}}v\varphi'(v)\right)\left(-\frac{\sqrt{|\theta|}}{\sqrt{\gamma}}u\varphi'(u)\right) \\
&\leq (1+\theta\varphi(v)[\varphi(u)+\frac{1}{\gamma}u\varphi'(u)]) \\
&\quad \cdot((1+\theta\varphi(u)[\varphi(v)+\frac{1}{\gamma}v\varphi'(v)])
\end{aligned}$$

für $v \in [0,1]$, woraus neuerlich $Z \geq 0$ folgt.

ii. Sei $u \in [0,1]$ derart, dass $\varphi(u) + 1/\gamma u\varphi'(u) \geq 0$ gilt. Dies führt zwar dazu, dass $\theta\varphi(v)[\varphi(u) + 1/\gamma u\varphi'(u)] \leq 0$ für $v \in [0,1]$ ist. Da aber $\theta \geq -1$ und $\varphi(u) + 1/\gamma u\varphi'(u) \leq 1$ gelten, gilt die folgende Abschätzung:

$$\begin{aligned}
1+\theta\varphi(v)[\varphi(u)+\frac{1}{\gamma}u\varphi'(u)] &\geq 1-\varphi(v) \\
&\geq -\frac{1}{\gamma}v\varphi'(v) \text{ wegen (39)}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\geq -\frac{1}{\sqrt{\gamma}} v\varphi'(v) \;\text{ wegen (36)} \\
&\geq -\frac{\sqrt{|\theta|}}{\sqrt{\gamma}} v\varphi'(v) \;\text{ wegen } -1 \leq \theta < 0
\end{aligned}
$$

für $v \in [0,1]$.

Damit ist

$$
\begin{aligned}
-\frac{\theta}{\gamma} u\varphi'(u) v\varphi'(v) &\leq \left(\frac{\sqrt{|\theta|}}{\sqrt{\gamma}} v\varphi'(v)\right)\left(\frac{\sqrt{|\theta|}}{\sqrt{\gamma}} u\varphi'(u)\right) \\
&\leq (1 + \theta\varphi(v)[\varphi(u) + \frac{1}{\gamma} u\varphi'(u)]) \\
&\quad \cdot((1 + \theta\varphi(u)[\varphi(v) + \frac{1}{\gamma} v\varphi'(v)])
\end{aligned}
$$

für $v \in [0,1]$, woraus $Z \geq 0$ folgt.

(b) Fall: $\varphi(u) < 0$, $\varphi'(u) > 0$ für $u \in [0,1]$.

In diesem Falle folgt aus (22), dass

$$
\frac{1}{\gamma} \leq \frac{1 - \varphi(u)}{u\varphi'(u)} \Rightarrow 1 - \varphi(u) \geq \frac{1}{\gamma} u\varphi'(u), \quad u \in [0,1] \tag{40}
$$

gilt. Wiederum kann $\varphi(u) + 1/\gamma u\varphi'(u)$ auf $[0,1]$ ein wechselndes Vorzeichen besitzen, was zu der Fallunterscheidung führt:

i. Sei $u \in [0,1]$ derart, dass $\varphi(u)+1/\gamma u\varphi'(u) \leq 0$ ist. Dann ist $\theta\varphi(v)[\varphi(u)+1/\gamma u\varphi'(u)] \leq 0$ für $v \in [0,1]$. Wegen $\theta \geq -1$ und $\varphi(u)+1/\gamma u\varphi'(u) \geq -1$ gilt die folgende Abschätzung:

$$
\begin{aligned}
1 + \theta\varphi(v)[\varphi(u) + \frac{1}{\gamma} u\varphi'(u)] &\geq 1 - \varphi(v) \\
&\geq \frac{1}{\gamma} v\varphi'(v) \;\text{ wegen (40)} \\
&\geq \frac{1}{\sqrt{\gamma}} v\varphi'(v) \;\text{ wegen (36)} \\
&\geq \frac{\sqrt{|\theta|}}{\sqrt{\gamma}} v\varphi'(v) \;\text{ wegen } -1 \leq \theta < 0
\end{aligned}
$$

für $v \in [0,1]$.

Damit ist

$$
-\frac{\theta}{\gamma} u\varphi'(u) v\varphi'(v) \leq \left(\frac{\sqrt{|\theta|}}{\sqrt{\gamma}} v\varphi'(v)\right)\left(\frac{\sqrt{|\theta|}}{\sqrt{\gamma}} u\varphi'(u)\right)
$$

$$\leq (1 + \theta\varphi(v)[\varphi(u) + \frac{1}{\gamma}u\varphi'(u)])$$
$$\cdot((1 + \theta\varphi(u)[\varphi(v) + \frac{1}{\gamma}v\varphi'(v)])$$

für $v \in [0,1]$, woraus neuerlich $Z \geq 0$ folgt.

ii. Sei $u \in [0,1]$ derart, dass $\varphi(u) + 1/\gamma u\varphi'(u) \geq 0$ gilt. Dies führt dazu, dass $\theta\varphi(v)[\varphi(u) + 1/\gamma u\varphi'(u)] \geq 0$ für $v \in [0,1]$ ist, womit die folgende Abschätzung gilt:

$$\begin{aligned}
1 + \theta\varphi(v)[\varphi(u) + \frac{1}{\gamma}u\varphi'(u)] &\geq 1 \geq 1 - \varphi(v) \\
&\geq -\frac{1}{\gamma}v\varphi'(v) \;\text{ wegen (40)} \\
&\geq -\frac{1}{\sqrt{\gamma}}v\varphi'(v) \;\text{ wegen (36)} \\
&\geq -\frac{\sqrt{|\theta|}}{\sqrt{\gamma}}v\varphi'(v) \;\text{ wegen } -1 \leq \theta < 0
\end{aligned}$$

für $v \in [0,1]$.

Damit ist

$$\begin{aligned}
-\frac{\theta}{\gamma}u\varphi'(u)v\varphi'(v) &\leq \left(\frac{\sqrt{|\theta|}}{\sqrt{\gamma}}v\varphi'(v)\right)\left(\frac{\sqrt{|\theta|}}{\sqrt{\gamma}}u\varphi'(u)\right) \\
&\leq (1 + \theta\varphi(v)[\varphi(u) + \frac{1}{\gamma}u\varphi'(u)]) \\
&\quad \cdot((1 + \theta\varphi(u)[\varphi(v) + \frac{1}{\gamma}v\varphi'(v)])
\end{aligned}$$

für $v \in [0,1]$, woraus $Z \geq 0$ folgt. □

Beispiel 9 *Betrachte $\varphi(u) = 1 - u^k$ mit $k > 0$, $u \in [0,1]$. Dann ist*

$$C(u, v; \gamma, \theta) = uv(1 + \theta(1 - u^k)(1 - v^k)^{1/\gamma} \;\; u, v \in [0,1]$$

für $\theta \in [-1,1]$ und

$$-1 \leq -\frac{1}{k} \leq \frac{1}{\gamma} \leq \frac{1}{k} \leq 1$$

eine Copula, was verlangt, dass $k \geq 1$ sein muss. Dies schließt insbesondere für $k = 1$ die FGM-Copula ein.

Beispiel 10 *Betrachte* $\varphi(u) = \min\left(1, \frac{1}{u^k} - 1\right)$, $u \in [0,1]$, $k > 0$. *Dann ist*

$$C(u,v;\gamma,\theta) = uv\left(1 + \theta \min\left(1, \frac{1}{u^k} - 1\right) \min\left(1, \frac{1}{v^k} - 1\right)\right)^{1/\gamma} \quad u,v \in [0,1]$$

für $\theta \in [-1,1]$ *und*

$$-1 \leq -\frac{1}{k} \leq \frac{1}{\gamma} \leq \frac{1}{k} \leq 1$$

eine Copula, was wiederum verlangt, dass $k \geq 1$ *sein muss. Wird umgekehrt* $\gamma = 1$ *gesetzt, dann muss* $k = 1$ *sein, so dass*

$$u\varphi(u) = \min\left(1, \frac{1}{u} - 1\right) = \min(u, 1-u) \quad u \in [0,1]$$

ist. Dies entspricht für $k = 1$ *exakt der von Amblard & Girard (2002) identifizierten Obergrenze für* $u\varphi(u)$, $u \in [0,1]$. *D.h. die Fläche unterhalb von* $\min\left(1, \frac{1}{u} - 1\right)$, $u \in [0,1]$ *ist für* $k = 1$ *maximal.*

Beispiel 11 *Betrachte* $\varphi(u) = e^{-u} - e^{-1}$, $u \in [0,1]$. *Dann ist*

$$C(u,v;\gamma,\theta) = uv(1 + \theta(e^{-u} - e^{-1})(e^{-v} - e^{-1}))^{1/\gamma} \quad u,v \in [0,1]$$

für $\theta \in [-1,1]$ *und*

$$-2.48739 \leq -1 \leq \frac{1}{\gamma} \leq 1 \leq 2.718282$$

eine Copula.

6 Copula-Bedingungen für $\gamma = 0$

Für $\gamma = 0$ wurde

$$C(u,v;\theta) = uve^{\theta\varphi(u)\varphi(v)} \quad u,v \in [0,1]$$

für $\theta \in \Theta \subseteq [-1,1]$ gesetzt. Die konkrete Ausgestaltung des Parameterraums Θ hängt von den Eigenschaften der Funktion φ ab. Wir gehen wiederum davon aus, dass φ auf $[0,1]$ das Vorzeichen nicht wechselt, um eine eindeutig positive bzw. negative Abhängigkeit zu garantieren. Zu beachten ist, dass eine Copula den Wertebereich $[0,1]$ besitzt, womit $e^{\theta\varphi(u)\varphi(v)}$, $u,v \in [0,1]$ ebenfalls beschränkt sein muss. Dann gilt:

1. Wenn φ auf $[0,1]$ nicht beschränkt ist, so ist

   $$e^{\theta\varphi(u)\varphi(v)} \quad u,v \in [0,1]$$

   nur dann beschränkt, wenn $\theta \in [-1,0]$ ist. D.h. $\Theta = [-1,0]$.

   Als Beispiel kann die Setzung $\varphi(u) = \ln u$, $u \in [0,1]$ der Barnett-Gumbel-(BG-) Copula betrachtet werden.

2. Ist φ auf $[0,1]$ beidseitig beschränkt, so kann $\Theta = [-1,1]$ gewählt werden. Wir gehen o.B.d.A. davon aus, dass für beidseitig beschränkte Funktionen φ gilt:

   $$|\varphi(u)| \leq 1, \quad u \in [0,1].$$

   Gegenfalls ist eine geeignete Umskalierung vorzunehmen.

   Ein Beispiel für eine solche beschränkte Funktion φ ist durch $\varphi(u) = 1-u$, $u \in [0,1]$ gegeben. Diese Wahl führt zu der von Cuadras (2009) vorgeschlagenen „New Copula".

Wir müssen also im Folgenden die Fälle beschränkter und nicht-beschränkter Funktion φ getrennt betrachten.

Bedingung aufgrund der bedingten Wahrscheinlichkeit Für die erste partielle Ableitung von $\ln C(u,v;\theta)$ gilt:

$$\frac{\partial \ln C(u,v;\theta)}{\partial u} = \frac{1}{u} + \theta\varphi'(u)\varphi(v) = \frac{1+\theta u\varphi'(u)\varphi(v)}{u} \quad u,v \in [0,1]$$

Diese ist nicht-negativ, falls

$$1 + \theta u\varphi'(u)\varphi(v) \geq 0 \quad u,v \in [0,1] \tag{41}$$

gilt.

1. Wenn φ nicht-negativ, monoton abnehmend oder nicht-positiv, monoton zunehmend auf $[0,1]$ ist, ist diese Bedingung für $\theta < 0$ erfüllt.

2. Für $\theta > 0$ muss φ beschränkt sein, d.h. $|\varphi(v)| \leq 1$, $v \in [0,1]$, so dass für $\theta = 1$ folgt:

   $$1 + u\varphi'(u) \geq 0 \iff u\varphi'(u) \geq -1 \quad u \in [0,1]. \tag{42}$$

Moderate Wachstumsbedingung Die zweite gemischte Ableitung von $\ln C(u,v;\theta)$ ist

$$\frac{\partial^2 \ln C(u,v;\theta)}{\partial u \partial v} = \theta\varphi'(u)\varphi'(v) \quad u,v \in [0,1] \tag{43}$$

für $\theta \in \Theta$, wobei je nach Beschränktheit von φ $\Theta = [-1,1]$ oder $\Theta = [0,1]$ ist.

Wenn $\theta > 0$ und φ monoton auf $[0,1]$ sind, ist diese gemischte zweite Ableitung nicht-negativ auf $[0,1]$.

Daraus folgt die Aussage des folgenden Satzes:

Satz 5 *Sei $\varphi : [0,1] \to \mathbb{R}$ differenzierbar und monoton auf [0,1], so dass*

1. $\varphi(1) = 0$,
2. $|\varphi(u)| \leq 1$, $u \in [0,1]$,

dann ist

$$C(u,v;\theta) = uve^{\theta\varphi(u)\varphi(v)} \quad u,v \in [0,1]$$

für $\theta \in [0,1]$ eine Copula.

Beweis: Da $\theta > 0$ ist, muss nach (42) $|\varphi(u)| \leq 1$ gelten, damit

$$\frac{\partial \ln C(u,v;\theta)}{\partial u} \geq 0 \quad \text{und} \quad \frac{\partial \ln C(u,v;\theta)}{\partial v} \geq 0$$

für $u,v \in [0,1]$. Da

$$\frac{c(u,v;\theta)}{C(u,v;\theta)} = \frac{\partial^2 \ln C(u,v;\theta)}{\partial u \partial v} + \frac{\partial \ln C(u,v;\theta)}{\partial u}\frac{\partial \ln C(u,v;\theta)}{\partial v} \geq 0$$

für $u,v \in [0,1]$, wenn

$$\frac{\partial^2 \ln C(u,v;\theta)}{\partial u \partial v} \geq 0 \quad u,v \in [0,1].$$

Dies ist laut (43) für $\theta > 0$ der Fall. $\square$

Für monotone Funktionen φ ist damit der Fall $\theta < 0$ von Interesse. Für diesen wird explizit die zweite gemischte Ableitung $c(.,.;\theta)$ von $C(.,.;\theta)$ benötigt. Diese lautet

$$\frac{c(u,v;\theta}{C(u,v;\theta)} = \frac{Z}{uv} \quad u,v \in [0,1]$$

mit

$$Z = \theta u\varphi'(u)v\varphi'(v) + (1+\theta u\varphi'(u)\varphi(v))(1+\theta\varphi(u)v\varphi'(v)) \quad u,v \in [0,1].$$

Der folgende Satz gibt hinreichende Bedingungen dafür an, dass $Z \geq 0$ ist.

Satz 6 *Sei φ differenzierbar und nicht-negativ, monoton abnehmend bzw. nicht-positiv, monoton zunehmend auf* $[0, 1]$.

Wenn

1. $\varphi(1) = 0$,
2. $|u\varphi'(u)| \leq 1$, $u \in [0, 1]$,

dann ist

$$C(u, v; \theta) = uve^{\theta\varphi(u)\varphi(v)} \quad u, v \in [0, 1]$$

für $\theta \in [-1, 0]$ *eine Copula.*

Beweis: Wir betrachten nur den Fall, dass φ nicht-negativ, monoton abnehmend auf $[0, 1]$ ist. Der Fall, dass φ nicht-positiv, monoton zunehmend auf $[0, 1]$ ist, kann analog nachgewiesen werden.

Sei $\theta < 0$. Es sind

$$1 + \theta u\varphi'(u)\varphi(v) \geq 1 \quad u, v \in [0, 1]$$

und

$$1 + \theta v\varphi'(v)\varphi(u) \geq 1 \quad u, v \in [0, 1].$$

Gleichzeitg ist laut Voraussetzung $u\varphi'(u) \geq -1$, $u \in [0, 1]$. Damit folgt

$$-1 \leq \theta u\varphi'(u)v\varphi'(v) \leq 0 \quad u, v \in [0, 1]$$

Insgesamt ist damit

$$Z = \theta u\varphi'(u)v\varphi'(v) + (1 + \theta u\varphi'(u)\varphi(v))(1 + \theta v\varphi'(v)\varphi(u)) \geq 0$$

für $u, v \in [0, 1]$. $\square$

Beispiel 12 *Wenn* $\varphi(u) = 1 - u^k$, $u \in [0, 1]$, $k > 0$ *ist, gilt*

$$u\varphi'(u) = -ku^k \geq -1 \quad u \in [0, 1],$$

falls $k \leq 1$ *ist. Damit ist*

$$C(u, v; \theta) = uve^{\theta(1-u)^k(1-v)^k} \quad u, v \in [0, 1]$$

für alle $\theta \in [-1, 1]$ *und* $0 < k \leq 1$ *eine Copula. Dies schließt die Copula für* $k = 1$ *ein, die von Cuadras (2009) neu (NC=new copula) eingeführt wurde.*

Beispiel 13 *Betrachte* $\varphi(u) = e^{-u} - e^{-1}$, $u \in [0,1]$. *Dann sind* $|\varphi(u)| \leq 1$, $u \in [0,1]$ *und*

$$u\varphi'(u) = -ue^{-u} \geq -1 \ \ u \in [0,1].$$

Somit ist

$$C(u,v;\theta) = uv \exp\left(\theta(e^{-u} - e^{-1})(e^{-v} - e^{-1})\right) \ \ u,v \in [0,1]$$

für alle $\theta \in [-1,1]$ *eine Copula.*

Beispiel 14 *Betrachte* $\varphi(u) = \ln u$, $u \in [0,1]$. *Dann ist* $\varphi(u)$ *auf* $[0,1]$ *zwar nicht nicht-positiv und monoton, aber nicht beschränkt. Weiterhin gilt*

$$u\varphi'(u) = 1 \ \ u \in [0,1],$$

so dass

$$C(u,v;\theta) = uve^{\theta \ln u \ln v} \ \ u,v \in [0,1]$$

für $\theta \in [-1,0]$ *eine Copula. Diese sog. Gumbel-Barnett-Copula wurde z.B. von Cuadras (2009) untersucht.*

Beispiel 15 *Betrachte nun* $\varphi(u) = \min\left(1, \frac{1}{u^k} - 1\right)$, $u \in [0,1]$, $k > 0$. *Dann ist*

$$-1 \leq u\varphi'(u) = \begin{cases} 0 & \text{für } u < (1/2)^{1/k} \\ -ku^{-k} & \text{für } u < (1/2)^{1/k}. \end{cases}$$

für $\theta \in [-1,1]$, *falls* $k \leq 1$ *ist. Dies schließt wieder den von Amblard & Girard (2002) diskutierten Grenzfall* $u\varphi(u) \leq \min(u, 1-u)$, $u \in [0,1]$ *ein. In diesem Grenzfall ist*

$$C(u,v;\theta) = uv \exp\left(\theta \min\left(1, \frac{1}{u^k} - 1\right) \min\left(1, \frac{1}{v^k} - 1\right)\right) \ \ u,v \in [0,1]$$

eine Copula für $\theta \in [-1,1]$.

7 Zusammenfassung der Ergebnisse für ausgewählte $\varphi(u) = 1 - u^k$

Zusammenfassend konnte nachgewiesen werden, dass für $\varphi(u) = 1 - u^k$, $u \in [0,1]$

$$C(u,v;\gamma,\theta) = uv(1 + \theta\varphi(u)\varphi(v))^{1/\gamma} \ \ u,v \in [0,1]$$

für alle $\theta \in [-1,1]$ eine Copula ist, wenn

1. $\theta \in [-1, 0)$ und $1/\gamma \in [-1/k, \min(1/k, 1)$ ist oder
2. $\theta \in [0, 1]$ und $1/\gamma \in [\max(-1/k, -1), 1/k]$

gilt.

1. Für $k = 1$ erhält man auf jeden Fall für alle $\theta \in [-1, 1]$ die FGM- und die AMH-Copula. Zudem ist

   $$C(u, v; \gamma, \theta) = uv(1 + \theta(1-u)(1-v))^{1/\gamma} \quad u, v \in [0, 1]$$

   eine Copula für alle $\theta \in [-1, 1]$, wenn $-1 \leq 1/\gamma \leq 1$ gilt. Dies ist zum Beispiel für $1/\gamma = -1/2$ der Fall, was zu der neuen Copula

   $$C(u, v; \gamma = -2, \theta) = \frac{uv}{\sqrt{(1 + \theta(1-u)(1-v))}} \quad u, v \in [0, 1]$$

   führt.

2. Für $k > 1$ ist die Bedingung $-1/k \leq 1/\gamma \leq 1/k$ für alle $\theta \in [-1, 1]$ bindend. So ist dann auch

   $$C(u, v; \gamma = -2, \theta) = \frac{uv}{\sqrt{(1 + \theta(1-u^2)(1-v^2))}} \quad u, v \in [0, 1]$$

   für alle $\theta \in [-1, 1]$ eine Copula.

3. Für $k < 1$ ist $-1 \leq 1/\gamma \leq 1$ zu wählen. So ist für $k = 1/2$ und $\gamma = -2$

   $$C(u, v; \gamma = -2, \theta) = \frac{uv}{\sqrt{(1 + \theta(1-\sqrt{u})(1-\sqrt{v}))}} \quad u, v \in [0, 1]$$

   für alle $\theta \in [-1, 1]$ eine Copula.

4. Ein entsprechender Nachweis für $k = 1/2$ und $\gamma = -1/2$, dass

   $$C(u, v; \gamma = -1/2, \theta) = \frac{uv}{(1 + \theta(1-\sqrt{u})(1-\sqrt{v}))^2} \quad u, v \in [0, 1]$$

   eine Copula ist, ist mit den hier bewiesenen Sätzen, die bezüglich der moderaten Wachstumsbedingung lediglich hinreichende Bedingungen nennen, nicht zu führen.

Schließlich ist

$$C(u,v;\theta) = uv \exp\big(1 + \theta(1-u^k)(1-v^k)\big) \;\; u,v \in [0,1]$$

für alle $\theta \in [-1,1]$ und $0 < k \leq 1$ eine Copula.

Die Familien dieser Copulas sind zudem abgeschlossen gegenüber der Bildung eines gewichteten Potenzmittelwertes:

1. So ist für $k = 1$ zum Beispiel auch

$$\begin{aligned}&\big(\alpha C(u,v;\gamma=-2,\theta_1)^{-2} + (1-\alpha)C(u,v;\gamma=-2,\theta_2)^{-2}\big)^{-1/2} \\ &= \frac{uv}{\sqrt{1+\alpha(\theta_1 + (1-\alpha)\theta_2)(1-u)(1-v)}}\end{aligned}$$

   mit $u,v \in [0,1]$ und $\theta_i \in [-1,1]$, $i = 1,2$ eine Copula mit dem Abhängigkeitsparameter $\alpha\theta_1 + (1-\alpha)\theta_2$.

2. Unter Verwendung des gewichteten geometrischen Mittels ist für $k = 1$

$$C(u,v;\theta_1)^{\alpha} C(u,v;\theta_2)^{1-\alpha} = \exp\left((\alpha\theta_1 + (1-\alpha)\theta_2)(1-u)(1-v)\right)$$

   mit $u,v \in [0,1]$ und $\theta_i \in [-1,1]$, $i = 1,2$ ebenfalls eine Copula mit dem Abhängigkeitsparameter $\alpha\theta_1 + (1-\alpha)\theta_2$.

8 Abhängigkeitsmaße

Wir beschränken uns auf die Diskussion des Rangkorrelationskoeffizienten von Spearman, der sich für eine Copula $C(u,v)$ als

$$\rho = 12 \int_0^1 \int_0^1 C(u,v)dudv - 3$$

darstellt (siehe z.B. Nelson (1999)).

Für spezifische Setzungen von $\gamma \neq 0$, so dass

$$C(u,v;\theta,\gamma) = uv(1 + \theta\varphi(u)\varphi(v))^{1/\gamma} \tag{44}$$

für $\theta \in [-1,1]$ eine Copula darstellt, lässt sich Spearmans ρ explizit angeben.

So erhält man für $\gamma = 1$ und die von Amblard & Girard (2002, 2003) vorgeschlagene Copula

$$C(u, v; \gamma = 1, \theta) = uv + \theta u\varphi(u)v\varphi(v) \quad u, v \in [0, 1] \tag{45}$$

mit $\theta \in [-1, 1]$ den Rangkorrelationskoeffizienten von Spearman als:

$$\rho = 12\theta \left(\int_0^1 u\varphi(u)du \right)^2 .$$

Man sieht, dass insbesondere der Abhängigkeitsparameter θ und die Wahl der Funktion φ einen Einfluss auf den Wert von Spearmans ρ haben. Wenn φ entweder nicht-negativ oder nicht-positiv auf $[0, 1]$ ist, ist ρ umso größer, je größer die Fläche zwischen der Funktion φ und der Abszisse ist.

Beispiel 16 *Für $\varphi(u) = 1 - u^k$, $u \in [0, 1]$, $k > 0$ ergibt sich damit*

$$\rho = 12\theta \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{k+2} \right)^2 = 12\theta \frac{k^2}{4(k+2)^2}$$

für $\theta \in [-1, 1]$.

Offensichtlich sinkt mit wachsendem k die Fläche zwischen der Funktion $\varphi(u)$ und der Abszisse, so dass bei gegebenem Wert von $\theta \in [-1, 1]$ auch der Absolutbetrag von Spearmans ρ sinkt. Dieser kann dann in Abhängigkeit von k einen, u.U. nur einen sehr kleinen Bereich möglicher Werte für $\theta \in [-1, 1]$ annehmen, wie die folgende Tabelle zeigt.

k	$[\min(\rho), \max(\rho)]$
0.1	$[-0.00680, 0.00680]$
0.2	$[-0.0248, 0.0248]$
0.3	$[-0.0510, 0.0510]$
0.4	$[-0.0833, 0.0833]$
0.5	$[-0.120, 0.120]$
0.6	$[-0.160, 0.160]$
0.7	$[-0.202, 0.202]$
0.8	$[-0.245, 0.245]$
0.9	$[-0.289, 0.289]$
1.0	$[-0.333, 0.333]$

Tabelle 1: Wertebereich für Spearmans ρ für $\varphi(u) = 1 - u^k$ und alternative Werte von k und $\gamma = 1$.

Beispiel 17 *Auch für $\varphi(u) = e^{-u} - e^{-1}$, $u \in (0,1]$ lässt sich Spearmans ρ explizit als*

$$\rho = 12\theta \left(\int_0^1 (ue^{-u} - ue^{-1}) du \right)^2 = 12\theta \left(1 - \frac{5}{2} e^{-1} \right)^2$$

angeben. Dies führt dazu, dass sich für $\theta \in [-1,1]$ Werte von $\rho \in [-0.0774, 0.0774]$ ergeben, so dass diese Spezifikation von φ nur eine sehr eingeschränkte Modellierung der monotonen Abhängigkeit erlaubt.

Für $\gamma \neq 1$ ist hingegen eine Berechnung von Spearmans ρ mittels numerischer Integration erforderlich. Es ist

$$\rho = 12 \int_0^1 \int_0^1 C(u,v;\theta,\gamma) du dv - 3$$

mit $C(.,.;\theta,\gamma)$ entsprechend (44).

Beispiel 18 *Setzt man wiederum $\varphi(u) = 1 - u^k$, $u \in [0,1]$, $k > 0$. Dann erhält man für $1/\gamma = -1$ die folgenden Wertebereiche von ρ in Abhängigket von $k > 0$:*

k	$[\min(\rho), \max(\rho)]$
0.1	$[-0.00675, 0.00687]$
0.2	$[-0.0242, 0.0255]$
0.3	$[-0.0486, 0.0541]$
0.4	$[-0.0774, 0.0914]$
0.5	$[-0.109, 0.137]$
0.6	$[-0.141, 0.190]$
0.7	$[-0.174, 0.251]$
0.8	$[-0.207, 0.319]$
0.9	$[-0.240, 0.395]$
1.0	$[-0.271, 0.479]$

Tabelle 2: Wertebereich Spearmans ρ für $\varphi(u) = 1 - u^k$ und alternative Werte von k und $\gamma = -1$.

Für $k = 1$ ergibt sich die AMH-Copula, die den größten Wertebereich von Spearmans ρ ermöglicht. Zudem kann diese Copula eher positive als negative Abhängigkeiten erfassen.

Um den Einfluss von γ auf den Wertebereich von Spearmans ρ identifizieren zu können, wählen wir $\varphi(u) = 1 - u$, $u \in [0, 1]$ und lassen $1/\gamma$ den zulässigen Wertebereich von $[-1, 1]$ durchlaufen.

Beispiel 19 *Man lernt aus Tabelle 3, dass der Spearmans ρ für absolutbetragsmäßig große γ nur einen sehr kleinen Wertebereich möglicher Abhängigkeiten erfassen kann.*

γ	$[\min(\rho), \max(\rho)]$
-10	$[-0.0297, 0.0399]$
-8	$[-0.0370, 0.0501]$
-6	$[-0.0491, 0.0673]$
-4	$[-0.0730, 0.102]$
-2	$[-0.142, 0.215]$
-1	$[-0.271, 0.479]$
1	$[-0.333, 0.333]$
2	$[-0.180, 0.158]$
4	$[-0.0938, 0.0769]$
6	$[-0.0634, 0.0508]$
8	$[-0.0479, 0.0379]$
10	$[-0.0385, 0.0303]$

Tabelle 3: Wertebereich Spearmans ρ für $\varphi(u) = 1 - u$ und alternative Werte von γ.

9 Randabhängigkeit

9.1 Definitionen

Wir betrachten in Anlehnung an Ledford & Tawn (1996) die folgenden vier asymptotischen Tailindizes, die angeben wie stark U und V in den extremen Randbereichen $(U > u, V > u)$ für große $u \in [0, 1]$ bzw. $(U < u, V < u)$ für kleine $u \in [0, 1]$ zusammenhängen. Diese Indizes lassen sich ausschließlich mittels Copulas darstellen. Ausgangspunkt:

1. Oberer (starker) Tailkoeffizient:

$$\lambda_U = \lim_{u \to 1^-} P(U > u | V > u) = \lim_{u \to 1^-} \frac{1 - 2u + C(u,u)}{1-u}. \tag{46}$$

2. Unterer (starker) Tailkoeffizient:

$$\lambda_L = \lim_{u \to 0^+} P(U < u | V < u) = \lim_{u \to 0} \frac{C(u,u)}{u}. \tag{47}$$

3. Oberer (schwacher) Tailkoeffizient:

$$\overline{\chi}_U \equiv \lim_{u \to 1} \frac{P(U > u)P(V > u)}{P(U > u, V > u)} - 1 = \lim_{u \to 1} \frac{(1-u)^2}{1 - 2u + C(u,u)} - 1 \in [-1, 1] \tag{48}$$

4. unterer Extremwertindex

$$\overline{\chi}_L = \lim_{u \to 0} \frac{P(U < u)P(V < u)}{P(U < u, V < u)} - 1 = \lim_{u \to 0} \frac{u^2}{C(u,u)} - 1 \in [-1, 1] \tag{49}$$

Wenn $C(u,v)$ differenzierbar ist, so ergibt sich der obere (starke) Tailkoeffizient auch als

$$\lambda_U = 2 - \lim_{u \to 1^-} \frac{dC(u,u)}{du}$$

und der untere (starke) als

$$\lambda_L = \lim_{u \to 0^+} \frac{dC(u,u)}{du}.$$

Um Formeln für die schwachen Tailkoeffizenten zu erhalten, werden U und V via

$$S = -1/\log U \quad \text{bzw.} \quad T = -1/\log V,$$

in sog. Einheits-Fréchet-Randverteilungen überführt, so dass

$$P(S > s) = P(T > s) = P(U > e^{-1/s}) = 1 - e^{-1/s} \quad \text{für } s > 0.$$

gilt.

Eine im Punkte ∞ langsam variierende Funktion $\mathcal{L}$ hat die Eigenschaft

$$\frac{\mathcal{L}(ct)}{\mathcal{L}(t)} \to 1 \quad \text{für } t \to \infty$$

für jedes $c > 0$.

Wenn

$$\begin{aligned}
F_U(t,t) &:= P(S > t, T > t) = P\left(U > e^{-1/t}, V > e^{-1/t}\right) \\
&= 1 - 2e^{-1/t} + C(e^{-1/t}, e^{-1/t}) \\
&\approx \mathcal{L}(t)\frac{1}{t}^{1/\eta} \quad \text{für große } t
\end{aligned}$$

gilt, wobei $\mathcal{L}(t)$ eine in ∞ langsam variierende Funktion mit Grenzwert c für $t \to \infty$ und $\eta \in [0,1]$ sind, stellt sich der obere Extremwertindex dar als

$$\overline{\chi}_U = 2\eta - 1. \tag{50}$$

Gilt analog

$$\begin{aligned}
F_L(t,t) &= P(S < t, T < t) = P\left(U < 1 - e^{-1/t}, V < 1 - e^{-1/t}\right) \\
&= C\left(1 - e^{-1/t}, e^{-1/t}\right) \\
&\approx \mathcal{L}(t)\frac{1}{t}^{1/\eta} \quad \text{für große } t,
\end{aligned}$$

dann folgt für den unteren Extremwertindex

$$\overline{\chi}_L = 2\eta - 1. \tag{51}$$

Zu beachten ist, dass $\lambda_U = 0$ ($\lambda_L = 0$) ist, wenn $\overline{chi}_U < 1$ ($\overline{\chi}_L < 1$) ist. Nur im Falle $\overline{\chi}_U = 1$ ($\overline{\chi}_L = 1$), kann $\lambda_U = c \neq 0$ ($\lambda_L = c \neq 0$) sein, wobei $c = \lim_{t\to\infty} \mathcal{L}(t)$ ist.

9.2 Tailabhängigkeit für $\gamma > 0$

Satz 7 *Seien φ differenzierbar, $\varphi(1) = 0$ und*

$$C(u, v; \gamma, \theta) = uv\left(1 + \theta\varphi(u)\varphi(v)\right)^{1/\gamma} \quad u, v \in [0,1]$$

für geeignete $\gamma > 0$ und $\theta \in [-1,1]$ eine Copula.

Dann gelten:

1. $\lambda_L = \lambda_U = 0$.

2. $\overline{\chi}_L = 0$ *mit*

$$\begin{aligned}
F_L(t,t) &= C\left(1 - e^{-1/t}, e^{-1/t}, \gamma, \theta\right) \\
&\approx \left(1 + \frac{\theta}{\gamma}\varphi'(1)^2\right)\frac{1}{t^2} \quad \text{für große } t.
\end{aligned}$$

3. $\overline{\chi}_U = 0$ *mit*

$$F_U(t,t) = 1 - 2e^{-1/t} + C(e^{-1/t}, e^{-1/t})$$
$$\approx \left(1 + \frac{\theta}{\gamma}\varphi'(1)^2\right)\frac{1}{t^2} \ \textit{für große } t.$$

Beweis:

1. Es ist

$$\begin{aligned}\lambda_U &= \lim_{u\to 1^-}\Bigg(2 - \frac{dC(u,u;\gamma,\theta}{du} = 2 - 2u(1+\theta\varphi(u)^2)^{1/\gamma} \\ &\quad - u^2\frac{1}{\gamma}(1+\theta\varphi(u)^2)^{1/\gamma-1}\theta 2\varphi(u)\varphi'(u)\Bigg) \\ &= 2 - 2 = 0,\end{aligned}$$

wegen $\varphi(1) = 0$. Analog ist wegen $u = 0$ und $\varphi(u)$ und $\varphi'(u)$ beschränkt auf $[0,1]$:

$$\lambda_L = \lim_{u\to 0^+}\frac{dC(u,u;\gamma,\theta)}{du} = 0.$$

2. Es ist mittels $x^{1/\gamma} \approx 1 + 1/\gamma(x-1)$

$$\begin{aligned}F_L(t,t) &= C\left(1-e^{-1/t}, 1-e^{-1/t}, \gamma, \theta\right) \\ &\approx \left(1-e^{-1/t}\right)^2\left(1 + \frac{\theta}{\gamma}\varphi\left(1-e^{-1/t}\right)^2\right) \ \text{für große } t.\end{aligned}$$

Mit den Approximationen $\varphi(u) \approx \varphi(1) + \varphi'(1)(u-1)$ und $1 - e^{-1/t} \approx -1/t$, $e^{-2/t} \approx 1 - 2/t$ erhält man schließlich

$$\begin{aligned}F_L(t,t) &\approx \left(1-e^{-1/t}\right)^2\left(1 + \frac{1}{\gamma}\left(1+\theta\varphi'(1)^2e^{-2/t} - 1\right)\right) \\ &\approx \frac{1}{t^2}\left(1 + \frac{\theta}{\gamma}\varphi'(1)^2\left(1 - \frac{2}{t}\right)\right) \\ &\approx \left(1 + \frac{\theta}{\gamma}\varphi'(1)^2\right)\frac{1}{t^2} \ \text{für große } t.\end{aligned}$$

Damit sind $\eta = 1/2$, $\overline{\chi}_L = 0$ und

$$\mathcal{L}(t) = \left(1 + \frac{\theta}{\gamma}\varphi'(1)^2\right).$$

3. Wiederum mittels $x^{1/\gamma} \approx 1 + 1/\gamma(x-1)$ ist

$$\begin{aligned}
F_U(t,t) &= 1 - 2e^{-1/t} + C(e^{-1/t}, e^{-1/t}) \\
&\approx 1 - 2e^{-1/t} + e^{-2/t}\left(1 + \frac{1}{\gamma}\left(1 + \theta\varphi\left(e^{-1/t}\right)^2 - 1\right)\right) \\
&\approx 1 - 2e^{-1/t} + e^{-2/t}\left(1 + \frac{\theta}{\gamma}\varphi'(1)^2\left(1 - e^{-1/t}\right)^2\right) \\
&\approx \left(1 - e^{-1/t}\right)^2\left(1 + \frac{\theta}{\gamma}\varphi'(1)^2 e^{-2/t}\right) \\
&\approx \left(1 + \frac{\theta}{\gamma}\varphi'(1)^2\left(1 - \frac{2}{t}\right)\right)\frac{1}{t^2} \\
&\approx \left(1 + \frac{\theta}{\gamma}\varphi'(1)^2\right)\frac{1}{t^2} \text{ für große } t.
\end{aligned}$$

Damit sind $\eta = 1/2$, $\overline{\chi}_U = 0$ und

$$\mathcal{L}(t) = \left(1 + \frac{\theta}{\gamma}\varphi'(1)^2\right) \quad \Box$$

Beispiel 20 *Sei C die FGM-Copula, dann sind $\gamma = 1$ und $\varphi(u) = 1 - u$, $u \in [0,1]$. Mit $\varphi'(1) = -1$ ist*

$$F_L(t,t) \approx (1+\theta)\frac{1}{t^2}.$$

Dies entspricht dem Ergebnis von Currie (1999), S. 11. Weiterhin ist

$$F_U(t,t) \approx (1+\theta)\frac{1}{t^2}.$$

Auch dieses Resultat stimmt mit dem von Currie (1999), S. 10 überein.

9.3 Tailabhängigkeit für $\gamma < 0$

Satz 8 *Seien φ differenzierbar, $\varphi(1) = 0$ und*

$$C(u,v;\gamma,\theta) = uv\left(1 + \theta\varphi(u)\varphi(v)\right) \quad u,v \in [0,1]$$

für geeignete $\gamma < 0$ und $\theta \in [-1,1]$ eine Copula.

Dann gelten:

1. $\lambda_L = \lambda_U = 0$.

2. $\overline{\chi}_L = 0$ *mit*

$$F_L(t,t) = C\left(1-e^{-1/t}, 1-e^{-1/t}, \gamma, \theta\right) \approx \left(1 - \frac{\theta}{|\gamma|}\varphi'(1)^2\right)^{-1} \frac{1}{t^2} \text{ \textit{für große} } t.$$

3. $\overline{\chi}_U = 0$ *mit*

$$F_U(t,t) = 1 - 2e^{-1/t} + C(e^{-1/t}, e^{-1/t}) \approx \left(1 + \frac{\theta}{|\gamma|}\varphi'(1)^2\right) \frac{1}{t^2} \text{ \textit{für große} } t.$$

Beweis: Betrachte

$$C(u,v;\gamma,\theta) = \frac{uv}{(1+\theta\varphi(u)\varphi(v))^{1/|\gamma|}} \quad u,v \in [0,1].$$

1. $\lambda_U = \lambda_L = 0$ gilt, weil im Nachfolgenden gezeigt wird, dass $\chi_L = \chi_U = 0 < 1$ sind.

2. Es ist mittels $x^{1/|\gamma|} \approx 1 + 1/|\gamma|(x-1)$:

$$F_L(t,t) = C\left(1-e^{-1/t}, 1-e^{-1/t}, \gamma, \theta\right) \approx \left(1-e^{-1/t}\right)^2 \frac{1}{\left(1+\frac{\theta}{|\gamma|}\varphi'(1)^2\left(e^{-1/t}\right)^2\right)}.$$

Die Entwicklungen

$$(1-e^{-1/t})^2 = 1 - 2e^{-1/t} + e^{-2/t} \approx 1 - 2\left(1 - \frac{1}{t} + \frac{1}{2t^2} - \frac{1}{6t^3} + \frac{1}{24t^2}\right) +1 - \frac{2}{t} + \frac{4}{2t^2} - \frac{8}{t^3} + \frac{16}{24t^4} = \frac{1}{t^2} - \frac{1}{t^3} + \frac{14}{24t^4}$$

und

$$\left(e^{-1/t}\right)^2 = e^{-2/t} = 1 - \frac{2}{t} + \frac{4}{2t^2}$$

führen zu

$$F_L(t,t) \approx \frac{1}{t^2}\frac{1 - 1/t + 14/(24t^2)}{1 + \frac{\theta}{|\gamma|}\varphi'(1)^2\,(1 - 2/t + 2/t^2)} \approx \frac{1}{1+\frac{\theta}{|\gamma|}\varphi'(1)^2}\frac{1}{t^2} \text{ für große } t.$$

Damit sind $\eta = 1/2$, $\overline{\chi}_L = 0$ und

$$\mathcal{L}(t) = \left(1 + \frac{\theta}{|\gamma|}\varphi'(1)^2\right)^{-1}.$$

3. Wiederum mittels $x^{-1/|\gamma|} \approx 1 - \frac{1}{\gamma}x$ ist

$$\begin{aligned}
F_U(t,t) &= 1 - 2e^{-1/t} + C(e^{-1/t}, e^{-1/t}) \\
&\approx 1 - 2e^{-1/t} + e^{-2/t}\left(1 - \frac{\theta}{|\gamma|}\varphi(e^{-1/t})^2\right) \\
&\approx (1 - e^{-1/t})^2 - e^{-2/t}\frac{\theta}{|\gamma|}\varphi'(1)^2\left(e^{-1/t} - 1\right)^2 \\
&\approx (1 - e^{-1/t})^2 - e^{-2/t}\frac{\theta}{|\gamma|}\varphi'(1)^2\left(1 - e^{-1/t}\right)^2 \\
&\approx \left(1 - \frac{\theta}{|\gamma|}\varphi'(1)^2(1 - 2/t)\right)\left(1 - e^{-1/t}\right)^2 \\
&\approx \left(1 - \frac{\theta}{|\gamma|}\varphi'(1)^2\right)\frac{1}{t^2} \quad \text{für große } t.
\end{aligned}$$

Damit sind $\eta = 1/2$, $\overline{\chi}_U = 0$ und

$$\mathcal{L}(t) = \left(1 - \frac{\theta}{|\gamma|}\varphi'(1)^2\right).\square$$

Beispiel 21 *Sei C die AMH-Copula, dann sind $\gamma = -1$ und $\varphi(u) = 1-u$, $u \in [0,1]$. Dann sind $\varphi'(1) = -1$ und*

$$F_L(t,t) \approx \frac{1}{1+\theta}\frac{1}{t^2}.$$

Dies entspricht dem Ergebnis von Currie (1999), S. 5. Weiterhin ist

$$F_U(t,t) \approx (1-\theta)\frac{1}{t^2}.$$

Auch dieses Resultat stimmt mit dem von Currie (1999), S. 5 überein.

9.4 Tailabhängigkeit für $\gamma = 0$

Satz 9 *Seien φ differenzierbar, $\varphi(1) = 0$ und*

$$C(u,v;\theta) = uv\exp(\theta\varphi(u)\varphi(v)) \quad u,v \in [0,1]$$

für $\theta \in \Theta \subseteq [-1,1]$ eine Copula.

Dann gelten:

1. $\lambda_L = \lambda_U = 0$.

2. $\overline{\chi}_L = 0$ *mit*

$$\begin{aligned} F_L(t,t) &= C\left(1-e^{-1/t}, 1-e^{-1/t}, \gamma, \theta\right) \\ &\approx \left(1-\theta\varphi'(1)^2\right)\frac{1}{t^2} \text{ für große } t. \end{aligned}$$

3. $\overline{\chi}_U = 0$ *mit*

$$\begin{aligned} F_U(t,t) &= 1-2e^{-1/t}+C(e^{-1/t}, e^{-1/t}) \\ &\approx \left(1-\theta)\varphi'(1)^2\right)\frac{1}{t^2} \text{ für große } t. \end{aligned}$$

Beweis:

1. $\lambda_U = \lambda_L = 0$ gilt wiederum, weil im Nachfolgenden gezeigt wird, dass $\overline{\chi}_L = \overline{\chi}_U = 0 < 1$ sind.

2. Es ist

$$\begin{aligned} F_L(t,t) &= C\left(1-e^{-1/t}, 1-e^{-1/t}, \theta\right) \\ &= \left(1-e^{-1/t}\right)^2 \exp\left(\theta\varphi\left(1-e^{-1/t}\right)^2\right) \\ &\approx \left(1-e^{-1/t}\right)^2 \left(1+\theta\varphi\left(1-e^{-1/t}\right)^2\right) \\ &\approx \left(1-e^{-1/t}\right)^2 \left(1+\theta\varphi'(1)^2\left(e^{-1/t}\right)^2\right) \\ &\approx \frac{1}{t^2}\left(1+\theta\varphi'(1)^2\left(1-\frac{2}{t}\right)\right) \\ &\approx \left(1+\theta\varphi'(1)^2\right)\frac{1}{t^2} \text{ für große } t. \end{aligned}$$

Damit sind $\eta = 1/2$, $\overline{\chi}_L = 0$ und

$$\mathcal{L}(t) = 1+\theta\varphi'(1)^2.$$

3. Es ist

$$\begin{aligned} F_U(t,t) &= 1-2e^{-1/t}+C\left(e^{-1/t}, e^{-1/t}, \theta\right) \\ &= 1-2e^{-1/t}+e^{-2/t}\exp\left(\theta\varphi\left(e^{-1/t}\right)^2\right) \\ &\approx 1-2e^{-1/t}+e^{-2/t}\left(1+\theta\varphi\left(e^{-1/t}\right)^2\right) \\ &\approx 1-2e^{-1/t}+e^{-2/t}\left(1+\theta\varphi'(1)^2\left(e^{-1/t}-1\right)^2\right) \\ &\approx (1-e-1/t)^2\left(1+\theta\varphi'(1)^2e^{-2/t}\right) \\ &\approx \left(1+\theta\varphi'(1)^2\right)\frac{1}{t^2} \text{ für große } t. \end{aligned}$$

Damit sind $\eta = 1/2$, $\overline{\chi}_U = 0$ und

$$\mathcal{L}(t) = 1 + \theta\varphi'(1)^2.$$

Beispiel 22 *Für die BG-Copula gilt für* $\theta \in [-1, 0]$

$$C(u, v; \theta) = uve^{\theta \ln u \ln v} \quad u, v \in [0, 1].$$

Damit sind $\varphi(u) = \ln u$, $u \in [0, 1]$ *und* $\varphi'(1) = 1$, *womit*

$$\mathcal{L}(t) = 1 + \theta$$

ist.

Beispiel 23 *Cuadras (2009) betrachtet* $\varphi(u) = 1 - u$, $u \in [0, 1]$, *was ebenfalls zu*

$$\mathcal{L}(t) = 1 + \theta$$

führt.

10 Zusammenfassung

Wir haben hinreichende und teils notwendige Bedingungen identifiziert, so dass eine Familie von Aggregationsfunktionen, die abgeschlossen gegenüber der Bildung gewichteter Potenzmittelwerte ist, eine Familie von Copulas darstellt. Diese Copulafamilien verallgemeinern Resultate, die in der Literatur für die FGM-, die AMH- und die BG-Copula gezeigt wurden. Es wurde desweiteren für diese Verallgemeinerungen untersucht, welche Wertebereiche Spearmans ρ als prominentestes Abhängigkeitsmaß annehmen kann. Dabei zeigt sich, dass diese Wertebereiche häufig deutlich enger gefasst sind als bei der FGM- und der AMH-Copula. Gemeinsam mit diesen beiden Copulafamilien haben die vorgeschlagenen Verallgemeinerungen, dass sich mit ihnen keine Tailabhängigkeit erfassen lässt. Dies gilt sowohl für die starken als auch für die schwachen Tailkoeffizienten.

Literatur

[1] Amblard, C.; Girard, S. (2002). Symmetry and dependence properties within a semiparametric family of bivariate copulas. *Journal of Nonparametric Statistics*, 81, 19-27.

[2] Amblard, C.; Girard, S. (2003). Estimation procedures for a semiparametric family of bivariate copulas., *Journal of Computational and Graphical Statistics*, 14(2), 1-15.

[3] Coles, S.; Heffernan, J.; Tawn, J. (1999). Dependence measures for extreme value analyses. *Extremes*, 2, 339-365.

[4] Cuadras, C.M. (2009). Constructing copula functions with weighted geometric means. *Journal of Statistical Planning and Inference* **139**, 3766-3772.

[5] Currie, J.E. (1999). Directory of coefficients of tail-dependence. *Technical Report ST-99-06*. Lancaster University, UK.

[6] Drouet-Mari, D.; Kotz, S. (2001). *Correlation and Dependence*. Imperial College Press, London.

[7] Fischer, M.; Hinzmann, G. (2007). A new class of copulas with tail dependence and a generalized tail dependence estimator. Diskussionspapiere der Lehrstühle für Statistik der Universität Erlangen-Nürnberg. Nr. **77**.

[8] Fischer, M.; Klein, I. (2007). Constructing symmetric generalized FGM copulas by means of certain univariate distributions. *Metrika* **45**, 243-260.

[9] Fischer, M., Klein, I.: Some results on weak and strong tail dependence coefficients for means of copulas. Diskussionspapiere der Lehrstühle für Statistik der Universität Erlangen-Nürnberg. Nr. **78**.

[10] Heffernan, J. (2000). A directory of coefficients of tail dependence. *Extremes*, 3(3), 279-290.

[11] Joe, H. (1999). *Multivariate models and dependence concepts.* Chapman & Hall, London.

[12] Ledford, A.W. & Tawn, J.A. (1996). Statistics for near independence in multivariate extreme values. *Biometrika* **83**, 169-187.

[13] Lehmann, E. (1966). Some concepts of dependence. *Annals of Mathematical Statistics*, 37, 1137-1153.

[14] Nelson, R.B. (1999). *An introduction to copulas.* Springer, Berlin.