Friedrich-Alexander-Universität Erlangen-Nürnberg

Wirtschafts-und Sozialwissenschaftliche Fakultät

Diskussionspapier

56 / 2004

Rüschendorf-Copulas

Ingo Klein

Lehrstuhl für Statistik und Ökonometrie

Lange Gasse 20 · D-90403 Nürnberg

Rüschendorf-Copulas

Ingo Klein

Lehrstuhl für Statistik und Ökonometrie
Universität Erlangen-Nürnberg
ingo.klein@wiso.uni-erlangen.de

5. Mai 2003

Literatur:

- Amblard, C. & Girard, S. (2000). Symmetry and dependence within a semiparametric family of bivariate copulas. Working Paper **CRM-2690**, Univerity of Montreal.

- Fischer, M. & Klein, I. (2003). Constructing symmetric generalized FGM copulas by means of certain univariate distributions. Working Paper **50**, University of Erlangen-Nuremberg.

- Lee, M.-L. T. (1996). Properties and applications of the Sarmanov family of bivariate distributions. *Communications in Statistics - Theory and Methods* **25**, 1207-1222.

- Long,D. & Krzysztofowicz, R. (1995). A family of bivariate densities constructed from marginals. *Journal of the American Statistical Association* **90**, 739-746.

- Mari, D.D. & Kotz, S. (2001).*Correlation and Dependence.* Imperial College Press, London.

- Rüschendorf, L. (1985). Construction of Multivariate Distributions with Given Marginals. *Annals of the Institute of Statistical Mathematics* **37**, 225-233.

- Shubina, M. & Lee, M.-L. T. (2004). On maximum attainable correlation and other measures of dependence for the Sarmanov family of bivariate distributions. *Communications in Statistics - Theory and Methods* **33**, 1031-1052.

Rüschendorf-Copulas I: Bivariater Fall Definition

Bivariate Copula

Seien U und V über $[0,1]$ rechtecktverteilt, dann heißt

$$C(u,v) = P(U \le u, V \le v) \quad \text{für } u, v \in [0,1].$$

Copula.

Beachte:

$$c(u,v) = \frac{\partial^2 C(u,v)}{\partial u \partial v}$$

ist die Copuladichte.
Bedingte Wahrscheinlichkeiten:

$$P(V \le v | U \le u) = \frac{C(u,v)}{u}.$$

$$\begin{aligned} P(V \le v | U = u) &= \lim_{\varepsilon \to 0^+} P(V \le v < | u - \varepsilon < U \le u + \varepsilon) \\ &= \lim_{\varepsilon \to 0^+} \frac{P(V \le v <, u - \varepsilon < U \le u + \varepsilon)}{P(u - \varepsilon < U \le u + \varepsilon)} \\ &= \lim_{\varepsilon \to 0^+} \frac{P(V \le v <, u - \varepsilon < U \le u + \varepsilon)}{2\varepsilon} \\ &= \frac{\partial C(u,v)}{\partial u} \end{aligned}$$

Überschreitungswahrscheinlichkeiten:

$$\overline{C}(u,v) = P(U \ge u, V \ge v) = 1 - 2u + C(u,v).$$

Survival-Copula:

$$\hat{C}(u,v) = u + v - 1 + C(1-u, 1-v).$$

Beispiele:

1. Unabhängigkeitscopula: $\Pi(u,v) = uv$

2. Minimumscopula: $W(u,v) = \max(0, u+v-1)$

3. Maximumscopula: $M(u,v) = \min(u,v)$

Konvexe Kombinationen

Wenn C_1 und C_2 zwei Copulas sind, ist auch

$$\begin{aligned} C(u,v) &= \theta C_1(u,v) + (1-\theta) C_2(u,v) \\ &= C_2(u,v) + \theta(C_1(u,v) - C_2(u,v)) \\ &= C_2(u,v) + (-\theta)(C_2(u,v) - C_1(u,v)). \end{aligned}$$

eine Copula für $\theta \in [0,1]$.

Beispiel: B11-Copula von Joe

$$C(u,v) = \theta \min(u,v) + (1-\theta)uv = uv + \theta(\min(u,v) - uv).$$

Farlie-Gumbel-Morgenstern- (FGM-) Copula

$$C(u,v) = uv + \theta uv(1-u)(1-v)$$

für $\theta \in [-1,1]$.

Rüschendorf-Copula

$$C(u,v) = uv + \theta F^1(u,v)$$

mit

$$\begin{aligned} F^1(0,v) &= F^1(u,0) = 0 \text{ für } u,v \in [0,1] \\ F^1(1,v) &= F^1(u,1) = 0 \text{ für } u,v \in [0,1]. \end{aligned}$$

und für $0 \le u_1 \le u_2 \le 1$ und $0 \le v_1 \le v_2 \le 1$

$$(u_2-u_1)(v_2-v_1) \ge -\theta(F^1(u_2,v_2) - F^1(u_1,v_2) - F^1(u_2,v_1) + F^1(u_1,v_1)$$

Rüschendorf-Copuladichte

$$c(u,v) = 1 + \theta f^1(u,v)$$

mit

$$f^1(u,v) = \frac{\partial F^1(u,v)}{\partial u \partial v}.$$

D.h. insbesondere

$$\int_0^1 f^1(u,v)du = \int_0^1 f^1(u,v)dv = 0 \text{ für } u,v \in [0,1].$$

Problem: Es muß θ existieren, so daß

$$c(u,v) \ge 0 \text{ für } u,v \in [0,1].$$

Beispiele:

- Konvexe Kombination: $f^1(u,v) = c_1(u,v) - c_2(u,v)$ für $\theta \in [0,1]$,
- FGM: $f^1(u,v) = (1-2u(1-2v)$ für $\theta \in [-1,1]$.

BEACHTE: Jede Copuladichte besitzt mittels

$$c(u,v) = 1 + f^1(u,v) \text{ mit } f^1(u,v) = c(u,v) - 1$$

eine Rüschendorf-Darstellung mit Parameter $\theta = 1$.

Covariance Characteristic und Scaler

$$Cov(U,V) = \theta \int_0^1 \int_0^1 uvf^1(u,v)dudv.$$

Long & Krzysztofowicz bezeichnen

- θ als "covariance scaler"

- und die Funktion f^1 als "covariance characteristic".

Beide bestimmen gemeinsam die Abhängigkeitsstruktur der zugehörigen Copula.

BEACHTE: θ spielt aber nicht allgemein die Rolle eines Abhängigkeitsparameters.

Parameterraum

Allgemein kann man für eine vorgebenene Funktion f^1

$$\Theta(f^1) = \{\theta | 1 + \theta f^1(u,v) \geq 0, \text{ für alle } 0 \leq u,v \leq 1\}$$

den Parameterraum betrachten, für den das Konstruktionsprinzip von Rüschendorf eine Copuladichte liefert.

Fallunterscheidung:

1. Wenn $-a = \inf_{[0,1]^2}\{f^1(u,v)\}$ und $b = \sup_{[0,1]^2}\{f^1(uv)\}$ (d.h. f^1 ist beidseitig beschränkt), dann folgt

$$\Theta(f_1) = [-1/b, 1/a].$$

2. Falls $a \to \infty$ folgt damit

$$\Theta(f_1) = [-1/b, 0].$$

   D.h. θ kann nur negative Werte annehmen.

3. Falls $b \to \infty$ folgt damit

$$\Theta(f_1) = [0, 1/a].$$

   D.h. θ kann nur positive Werte annehmen.

4. Falls $a \to \infty$ und $b \to \infty$ folgt

$$\Theta(f_1) = \{0\}.$$

   D.h. $\theta = 0$, so daß nur die Unabhängigkeitscopula vorliegen kann.

Häufig werden Parameterbereiche präferiert, die durch -1 bzw. $+1$ beschränkt werden.

Dies läßt sich für spezielle Copulas sehr einfach erreichen:

1. Wenn f^1 beidseitig beschränkt ist, dann erfüllt

$$f^1(u,v;a,b) = \frac{f^1(u,v)}{\max\{a,b\}} \text{ für } u,v \in [0,1]$$

   für $\theta \in [-1,1]$ die Eigenschaften, um eine Copuladichte zu generieren.

   Beispiel: FGM-Copula

$$-1 \leq f^1(u,v) = (1-2u)(1-2v) \leq 1.$$

2. Ist f^1 nur einseitig beschränkt, dann lassen sich

$$f^1(u,v;a) = \frac{f^1(u,v)}{a} \text{ für } u,v \in [0,1]$$

bzw.

$$f^1(u,v;b) = \frac{f^1(u,v)}{b} \text{ für } u,v \in [0,1]$$

betrachten, damit für $0 \le \theta \le 1$ bzw. $-1 \le \theta \le 0$ die Eigenschaften einer Copuladichte erfüllt sind.

Verallgemeinerung des Konstruktionsprinzips

Rüschendorf hat gezeigt, daß sich die Funktion f^1 einfach als

$$f^1(u,v) = f(u,v) - \int_0^1 f(u,v)du - \int_0^1 f(u,v)dv + \int_0^1 \int_0^1 f(u,v)dudv$$

konstruieren läßt, wenn f eine beliebige über dem Einheitsquadrat nicht-negative und integrierbare Funktion ist.

Bezeichne $F(u,v) = \int_0^u \int_0^v f(x,y)dydx$, dann ist

$$F^1(u,v) = F(u,v) - uF(1,v) - vF(u,1) + uvF(1,1)$$

mit z.B.

$$F^1(u,1) = F(u,1) - uF(1,1) - F(u,1) + uF(1,1) = 0.$$

Beispiele von Rüschendorf-Copulas

- Auf der Diagonalen konzentrierte Copulas
- Copulas mit polygonaler Kovarianzcharakteristik
- Allgemeine Produktcopulas
- Semiparametrische Produktcopulas nach Amblard & Girard
- Dichtegenerierte Produktcopulas nach Fischer

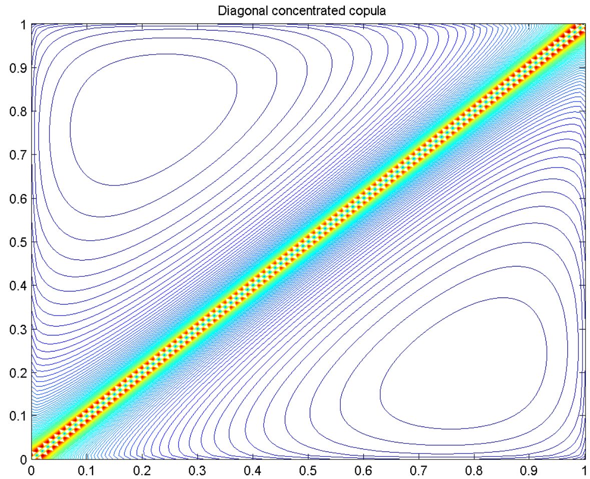
Auf der Diagonalen konzentrierte Copula (DC-Copula)

$$f(u,v) = \frac{1}{\sqrt{|u-v|}} \quad 0 < u \ne v < 1,$$

so daß

$$f^1(u,v) = \frac{1}{\sqrt{|u-v|}} - 2\sqrt{u} - 2\sqrt{1-u} - 2\sqrt{v} - 2\sqrt{1-v} + \frac{8}{3}.$$

BEACHTE: Singularität für $u = v$.



$$F^1(u,v) = \frac{4}{3}\begin{cases} u^{3/2}(1-v) + v^{3/2}(1-u)u(1-v)^{3/2} + v(1-u)^{3/2} - (v-u)^{3/2} \\ -v-u+2uv \quad \text{für } 0 \le u \le v \le 1 \\ \\ u^{3/2}(1-v) + v^{3/2}(1-u)u(1-v)^{3/2} + v(1-u)^{3/2} - (u-v)^{3/2} \\ -v-u+2uv \quad \text{für } 0 \le v \le u \le 1 \end{cases}$$

BEACHTE: Da f und entsprechend f^1 nach oben nicht beschränkt, aber nach unten beschränkt sind, muß

$$\Theta(f^1) = [0, 1/a]$$

sein mit $-a = \inf_{[0,1]^2}\{f^1(u,v)\} = -4/3$.

Copulas mit polygonaler Kovarianzcharakteristik (PCC-Copula)

$$f^1(u,v) = f_1^1(u,v) + f_2^1(u,v) - 2K(1)$$

mit

$$f_1^1(u,v) = \begin{cases} \kappa(u-v) & \text{für } u \ge v \\ \kappa(v-u) & \text{für } v \ge u \end{cases}$$

und

$$f_2^1(u,v) = \begin{cases} \kappa(u+v) & \text{für } u \le 1-v \\ \kappa(2-u-v) & \text{für } u \ge 1-u, \end{cases}$$

wobei κ eine auf $[0,1]$ stetige und monotone Funktion und

$$K(\omega) = \int_0^\omega \kappa(t)dt.$$

BEACHTE: Isoquanten verlaufen parallel zur Hauptdiagonalen bzw. zur Gegendiagonalen des Einheitsquadrates.

Long & Krzysztofowicz bezeichnen κ als regression characteristic, da die zweite Ableitung, d.h. die Krümmung der Regressionskurve $E(U|V=v)$ nur durch κ bestimmt wird:

$$\frac{d^2E(U|V=v)}{dv^2} = 2\theta(\kappa(v) - \kappa(1-v)) \;\text{ für } 0 \le v \le 1.$$

PCC-Copula:

$$C(u,v) = uv + \theta \begin{cases} \tilde{K}(u+v) - \tilde{K}(u-v) - 2uvK(1) & \text{für } u \geq v,\ u \leq 1-v \\ \tilde{K}(u+v) - \tilde{K}(v-u) - 2uvK(1) & \text{für } u \leq v,\ u \leq 1-v \\ \tilde{K}(2-(u+v)) - \tilde{K}(u-v) - 2(1-u)(1-v)K(1) & \\ \qquad\qquad \text{für } u \geq v,\ u \geq 1-v & \\ \tilde{K}(2-(u+v)) - \tilde{K}(v-u) - 2(1-u)(1-v)K(1) & \\ \qquad\qquad \text{für } u \leq v,\ u \geq 1-v. & \end{cases}$$

mit $\tilde{K}(\omega) = \int_0^\omega K(t)dt$.

Copula mit Power Regression Characteristic (PRC-Copula)

Power Regression Characteristic:

$$\kappa(\omega) = (1-\omega)^\beta \text{ für } 0 \leq \omega \leq 1,\ \beta > 0$$

Je nach dem Wert für β ergibt sich ein konkaver ($0 < \beta < 1$), linearer ($\beta = 1$) oder konvexer ($\beta > 1$) Verlauf von κ.

Parameterraum für θ:

$$\Theta(\kappa) = \left[-\frac{\beta+1}{2\beta}, \frac{\beta+1}{2} \right].$$

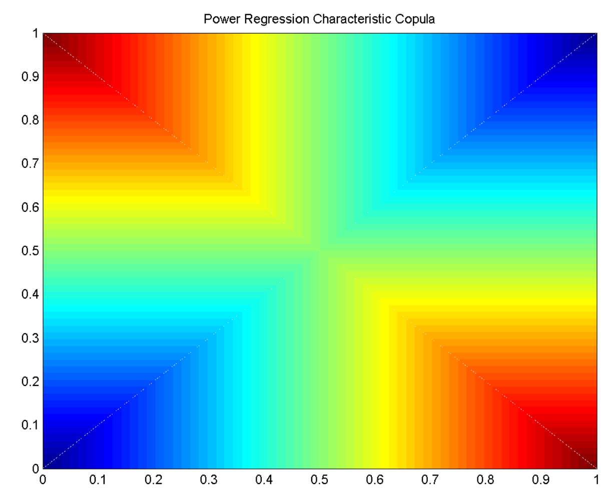
Für die "power regression characteristic" sind speziell

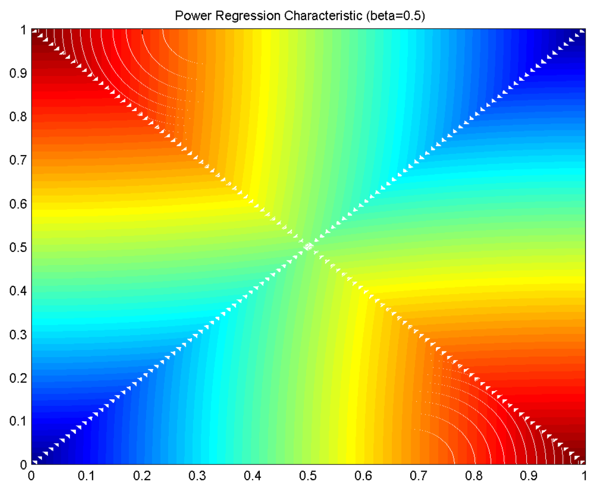
$$K(\omega) = \frac{1}{\beta+1}\left(1-(1-\omega)^{\beta+1}\right)$$

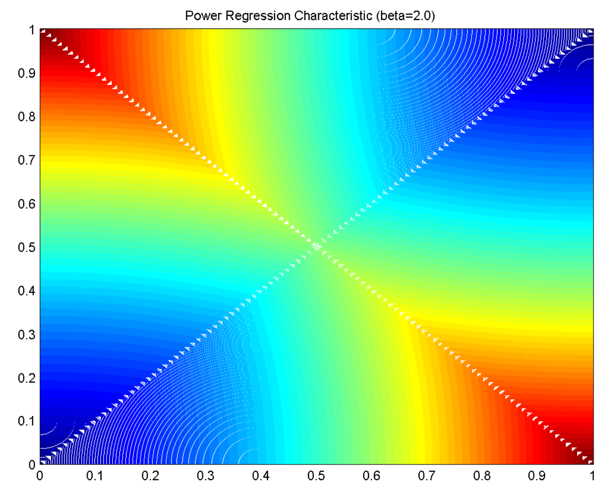
und

$$\tilde{K}(\omega) = \frac{1}{(\beta+1)(\beta+2)}\left(-1+(\beta+2)\omega+(1-\omega)^{\beta+2}\right)$$

für $0 \leq \omega \leq 1$.







Allgemeine Produktcopulas (Sarmanov-Copulas)

$$\begin{aligned} F^1(u,v) &= \phi(u)\psi(v) - u\psi(v)\phi(1) - v\phi(u)\psi(1) + uv\phi(1)\psi(1) \\ &= (\phi(u) - u\phi(1))(\psi(v) - v\psi(1)) \end{aligned}$$

für ϕ und ψ Funktionen auf $[0,1]$ mit $\phi(1) < \infty$ und $\psi(1) < \infty$.

Sind ϕ und ψ auf $[0,1]$ differenzierbar mit beschränkten Ableitungen ϕ' und ψ', dann existiert ein θ, so daß

$$c(u,v); \phi, \psi) = 1 + \theta(\phi'(u) - \phi(1))(\psi'(v) - \psi(1))$$

eine Copuladichte ist.

Der Vorteil der Produktcopula besteht darin, daß der Parameter nicht nur die Rolle eines Kovarianzskalierers spielt, der im wesentlichen das Vorzeichen der Abhängigkeit determiniert, sondern komplett die Abhängigkeitsstruktur festlegt.

Wenn $-a = \inf_{[0,1]^2}\{(\phi'(u) - \phi(1))(\psi'(v) - \psi(1)\} > -\infty$ und $b = \sup_{[0,1]^1}\{\phi'(u)\psi'(v)\} < \infty$, dann ist

$$\Theta(f^1) = [-1/b, 1/a].$$

BEISPIEL: Potenzcopula

$$\phi'(u) = u^k \text{ und } \psi'(v) = v^q \text{ für } u, v \in [0,1].$$

Dann sind

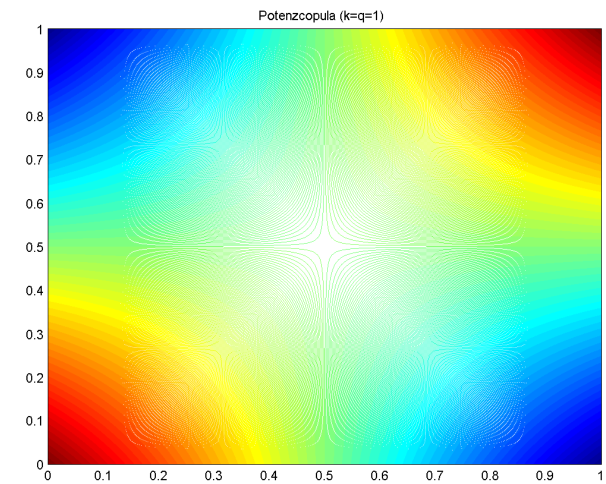
$$\phi(u) = \frac{1}{k+1} u^{k+1} \text{ und } \psi(v) = \frac{1}{q+1} v^{q+1} \text{ für } u, v \in [0,1],$$

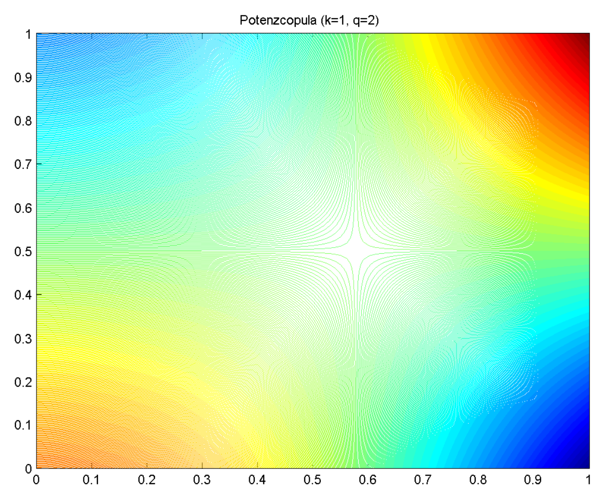
so daß $\phi(1) = 1/(k+1)$ und $\psi(1) = 1/(q+1)$. Die zugehörige Copula-dichte ist dann

$$c(u, v; k, q) = 1 + \theta \left(u^k - \frac{1}{k+1} \right) \left(v^q - \frac{1}{q+1} \right)$$

für

$$-\frac{(k+1)(q+1)}{kq} \le \theta \le \min \left\{ \frac{(k+1(q+1)}{k}, \frac{(k+1)(q+1)}{q} \right\}.$$





BEISPIEL: Produktcopula mit festem Nullpunkt
Für $k \ge 0$ sei

$$\phi(u; k) = \frac{1}{k+1} u^{k+1} \frac{1}{2\pi} \sin(2\pi u)$$

mit $\phi(0) = \phi(1) = 0$ und

$$\phi'(u; k) = u^k \frac{1}{2\pi} \sin(2\pi u) + \frac{1}{k+1} u^{k+1} \cos(2\pi u).$$

Beachte: $\phi(u; k) = 0$ für $u = 0, 1$ und für $u = 0.5$.
Es wird die Produktcopula

$$c(u, v; k, q) = 1 + \theta u^k \cos(2\pi u) v^q \cos(2\pi v)$$

betrachtet.

BEISPIEL: Produktcopula mit variablem Nullpunkt

$$\phi(u;k) = u(1-u)(1-ku)$$

mit den Nullstellen $u = 0, 1$ und $u = 1/k$. Es ist

$$\phi'(u;k) = 3ku^2 - 2u(k+1) + 1.$$

Es wird die Produktcopula

$$C(u,v;k,q) = 1 + \theta u(1-u)(1-ku)v(1-v)(1-qv)$$

betrachtet.

Semiparametrische Produktcopula nach Amblard & Girard

Spezialfall einer Produktcopula mit $\psi(u) = \phi(u)$:

$$C(u,v;\phi) = uv + \theta(\phi(u) - u\phi(1))(\phi(v) - v\phi(1))$$

bzw.

$$c(u,v;\phi) = 1 + \theta(\phi'(u) - \phi(1))(\phi'(v) - \phi(1)),$$

wenn ein entsprechendes θ existiert.

Amblard & Girard (2000) betrachten den Spezialfall einer Funktion ϕ^* mit $\phi^*(1) = 0$ und fordern weiterhin, daß $\Theta = [-1, 1]$ ist.

Wenn ϕ eine beidseitig beschränkte Ableitung ϕ' besitzt, dann stellen diese Forderungen keine Beschränkung der Allgemeinheit dar, da

$$\phi^*(u) = \frac{\phi(u) - u\phi(1)}{\max\{a, b\}}$$

mit

$$\begin{aligned} -a &= \inf_{[0,1]^2}\{(\phi'(u) - \phi(1))(\phi'(v) - \phi(1))\} \\ b &= \sup_{[0,1]^2}\{(\phi'(u) - \phi(1))(\phi'(v) - \phi(1))\} \end{aligned}$$

immer die Forderungen von Amblard & Girard erfüllt.

Bestimmte Werte von θ sichern spezielle Eigenschaften von ϕ bzw. (falls existent) von deren Ableitung ϕ':

1. Wenn es $\theta \neq 0$ gibt, so daß

$$C(u,v) = uv + \theta\phi(u)\phi(v) \quad \text{für } u, v \in [0,1]$$

eine Copula ist, dann sind wegen $C(0,0) = 0$ und $C(1,1) = 1$

$$\phi(0) = 0 \quad \text{und} \quad \phi(1) = 0.$$

2. Weiterhin ist für $\theta = -1$

$$(u_2 - u_1)(v_2 - v_1) \geq -\theta(\phi(u_2) - \phi(u_1))(\phi(v_2) - \phi(v_1)),$$

so daß, wenn $u_i = v_i$, $i = 1, 2$ gesetzt wird, die Lipschitz-Bedingung

$$|u_2 - u_1| \geq |\phi(u_2) - \phi(u_1)| \quad \text{für alle } u_1, u_2 \in [0,1]$$

gilt. Für $u_1 = 0$ und $u_1 = u \in [0,1]$ ist zusätzlich

$$u \geq \phi(u).$$

Für $u_2 = 1$ und $u_1 = u \in [0,1]$ ist mit $\phi(1) = 0$ (da $\theta = -1 \neq 0$):

$$1 - u \geq -\phi(u) \iff \phi(u) \leq 1 - u.$$

Insgesamt ist also $\phi(u) \leq \min\{u, 1-u\}$ für $u \in [0,1]$.

3. Ebenfalls für $\theta = -1$ ergibt sich für $u \in [0,1]$:

$$1 - \phi'(u)^2 \geq 0 \iff |\phi'(u)| \leq 1$$

D.h. die Ableitung von ϕ ist beidseitig beschränkt.

Somit läßt sich ϕ insbesondere dann näher charakterisieren, wenn $C(u,v) = uv + \theta\phi(u)\phi(v)$ für $\theta = -1$ eine Copula ist.

O.B.d.A. lassen sich aber Funktionen ϕ betrachten, für die $C(u,v) = uv + \theta\phi(u)\phi(v)$ für ein $\theta < 0$ eine Copula ist, da dann ein zugehöriges ϕ^* konstruiert werden kann, so daß $C(u,v) = uv + \theta\phi^*(u)\phi^*(v)$ für $\theta = -1$ eine Copula ist.

Hinreichend dafür ist, daß ϕ' nach oben beschränkt ist.

Dichtegenerierte Produktcopula nach Fischer

Zur Konstruktion von Copulas nach dem Verfahren von Amblard & Girard eignen sich besonders solche Funktionen mit $\phi(0) = \phi(1) = 0$.

Prinzipiell besitzen viele Dichtefunktionen, deren Träger die reellen Zahlen sind und für die $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} f(x) = 0$ gilt, diese Eigenschaften, wenn sie an der Stelle der Quantilsfunktion

$$\phi_f(u) = f(F^{-1}(u)) \text{ für } u \in (0,1).$$

und der Grenzübergang

$$\phi_f(0) \equiv \lim_{u\to 0^+} \phi_f(u) = \lim_{u\to 1^-} \phi_f(u) \equiv \phi_f(1) = 0$$

betrachtet werden.

Die zugehörige Copula lautet für geeignete θ

$$C(u,v;\theta,f) = uv + \theta f(F^{-1}(u)) f(F^{-1}(v)) \text{ für } u,v \in [0,1]$$

Die Copuladichte ist, sofern f differenzierbar ist:

$$c(u,v;\theta,f)(u,v) = 1 + \theta\left(-\frac{f'}{f}(F^{-1}(u))\right)\left(-\frac{f'}{f}(F^{-1}(v))\right) \text{ für } u,v \in [0,1].$$

D.h. die Copuladichte wird durch die Scorefunktion $-f'/f$ bestimmt.

Für die Existenz der Copula für $\theta = -1$ ist allerdings entscheidend, daß diese Scorefunktion nach oben beschränkt ist.

Damit kommen sofort einige Dichtefamilien nicht mehr in Frage. Zu ihnen gehört die Power Exponential Family

$$f(x) = k_1 \exp\left(-k_2 |x|^{k_3}\right) \quad \text{für } x \in \mathbb{R},$$

wobei $k_1 > 0$, $k_2 > 0$ und $k_3 \geq 2$ so gewählt sind, daß $f(x)$ eine Dichte darstellt.

Die zugehörige Scorefunktion ist ein Polynom mindestens 1. Grades und beidseitig unbeschränkt.

Zu dieser Verteilungsfamilie gehört auch die Standardnormalverteilung.

Fischer (2003) behandelt die Beispiele der Laplace-, der logistischen, der hyperbolischen Sekant- und der Cauchy-Verteilung, die allesamt zu in der Literatur wohlbekannten Copulas führen.

Diese Funktionen sind sämtlich symmetrisch.

Das folgende Beispiel diskutiert mit der Gumbelverteilung eine asymmetrische Verteilung:

Es ist

$$F(x) = \exp\left(-e^{-x}\right) \quad \text{für } x \in \mathbb{R},$$

so daß

$$f(x) = e^{-x} F(x) \quad \text{für } x \in \mathbb{R}$$

und

$$-\frac{f'(x)}{f(x)} = 1 - e^{-x} \quad \text{für } x \in \mathbb{R}$$

sind.

D.h. die Scorefunktion besitzt den Wert 1 als kleinste obere Schranke, ist aber nach unten nicht beschränkt.

Mit der zugehörigen Quantilsfunktion

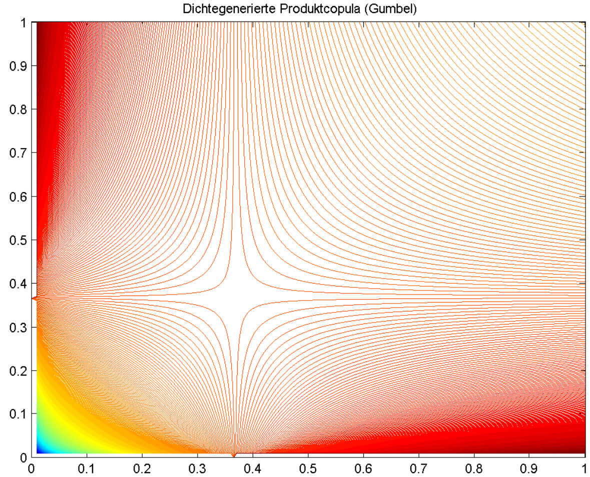
$$F^{-1}(u) = -\ln(-\ln(u)) \quad \text{für } u \in (0,1]$$

ist

$$\phi_f(u) = f\left(F^{-1}(u)\right) = u \ln u \quad \text{für } u \in (0,1].$$

Für $u \to 0^+$ ist $\phi_f(0) \equiv \lim_{u \to 0^+} u \ln u = 0$.

Dichtegenerierte Produktcopula (Gumbel)



Welche Dichten generieren Potenzcopulas?

Die zu einer Funktion ϕ zugehörige Dichte f errechnet sich durch Lösen der Differentialgleichung

$$F'(F^{-1}(u)) = \phi(u) \iff F'(x) = \phi(F(x))$$

nach F.

Diese Differentialgleichung läßt sich z.B. für die in der Potenzcopula auftretenden Funktion

$$\phi(u) = \frac{1}{k+1} u \left(1 - u^k\right)$$

durch Überführen in einer Bernoullische Differentialgleichung explizit lösen.

Die Lösung lautet

$$F(x) = k \left(1 + Ce^{-k/(k+1)x}\right)^{-k},$$

wobei C derart, daß F die Eigenschaften einer Verteilungsfunktion besitzt.

Beweis: Setze $y = F(x)$ und $y' = f(x)$. Dann ist zu lösen

$$y' - \frac{1}{k+1} y = -\frac{1}{k+1} y^{k+1}.$$

Division durch y^{k+1} ergibt

$$\frac{y'}{y^{k+1}} - \frac{1}{k+1} y^{-k} = -\frac{1}{k+1}.$$

Substituiert man $z = y^{-k}$, so ist $z' = -ky^{-(k+1)}y'$, so daß

$$-\frac{1}{k} z' - \frac{1}{k+1} z = -\frac{1}{k+1}.$$

Multipliziert man mit $-k$, so ergibt sich ein Spezialfall der einfachen Differentialgleichung 1. Ordnung

$$z' + P(x)z = Q(x),$$

deren Lösung

$$z = e^{-\int P(x)dx} \left(\int Q(x) e^{\int P(x)dx} dx + C \right)$$

lautet (siehe z.B. Bronstein & Semendjajew). Mit $P(x) = Q(x) = k/(k+1)$ ist

$$\begin{aligned} z &= e^{-k/(k+1)x} \left(\frac{k}{k+1} \int e^{k/(k+1)x} dx + C \right) \\ &= 1 + Ce^{-k/(k+1)x}. \end{aligned}$$

Substituiert man $y = z^k$ zurück, so ist schließlich

$$y = \left(1 + Ce^{-k/(k+1)x}\right)^{-k},$$

was zu zeigen war.

Rüschendorf-Copulas II: Bivariater Fall Eigenschaften

Eigenschaften

- Symmetrie
- Abhängigkeitseigenschaft
- Abhängigkeitsordnung
- Abhängigkeitsmaße
- Tailabhängigkeit

Symmetriekonzepte

1. Austauschbarkeit: X und Y heißen austauschbar, wenn (X, Y) und (Y, X) dieselbe Verteilung besitzen.

2. Marginale Symmetrie: (X, Y) heißt marginal symmetrisch um (a, b), wenn die Verteilung von $X - a$ und $a - X$ bzw. $Y - b$ und $b - Y$ dieselbe Verteilung besitzen.

3. Radiale Symmetrie: (X, Y) heißen radialsymmetrisch um (a, b), wenn $(X - a, Y - b)$ und $(a - X, b - Y)$ dieselbe Verteilung besitzen.

4. Gemeinsame Symmetrie: (X, Y) heißen gemeinsam symmetrisch um (a, b), wenn wenn $(X - a, Y - b)$ und $(a - X, b - Y)$ $(X - a, b - Y)$ und $(a - X, Y - b)$ dieselbe Verteilung besitzen.

Spezialfall: Copulas

Da Copulas Verteilungsfunktionen zweier Zufallsvariablen U und V über $[0,1]^2$ mit Rechteckverteilungen als Randverteilungen sind, liegt marginale Symmetrie von (U,V) um $(1/2,1/2)$ vor.

Radiale Symmetrie ist gegeben, wenn

$$\begin{aligned} P(U-1/2 \le x, V-1/2 \le y) &= P(U \le x+1/2, V \le y+1/2) \\ &= P(1/2-U \le x, 1/2-V \le y) \\ &= P(U \ge 1/2-x, V \ge 1/2-y) \end{aligned}$$

für $x,y \in [-1/2,1/2]$ sind.

Setze $u = x+1/2$ und $v = y+1/2$, dann ist bei radialer Symmetrie

$C(u,v) = P(U \ge 1-u, V \ge 1-v) = u+v-1+C(1-u,1-v)$ für $u,v \in [0,1]$.

Gemeinsame Symmetrie einer Copula C liegt vor, wenn zusätzlich zur radialen Symmetrie

$$C(u,v) = u - C(u,1-v) = v - C(1-u,v) \text{ für } u,v \in [0,1]$$

gilt.

Symmetrie der Rüschendorf-Copula

Für die Rüschendorf-Copula liegt Radialsymmetrie vor, wenn $F^1(u,v) = F^1(1-u,1-v)$ ist, da dann

$$\begin{aligned} C(u,v) &= uv + \theta F^1(u,v) \\ &= u+v-1+(1-u)(1-v)+\theta F^1(1-u,1-v) \\ &= u+v-1+C(1-u,1-v) \end{aligned}$$

für $0 \le u,v \le 1$ ist.

BEISPIEL: Betrachte

$$F^1(u,v) = \min(u,v) - uv$$

für $0 \le u,v \le 1$.

Dann ist

$$F^1(1-u,1-v) = \min(1-u,1-v) - (1-u)(1-v)$$

Sei o.B.d.A. $u < v$, dann ist $1-u > 1-v$ und

$$\begin{aligned} F^1(1-u,1-v) &= 1-v-(1-u)(1-v) = (1-v)(1-(1-u)) \\ &= u(1-v) = \min(u,v) - uv = F^1(u,v). \end{aligned}$$

Gemeinsame Symmetrie der Rüschendorf-Copula ist gegeben, wenn

$$F^1(u,v) = F^1(1-u,1-v) = -F^1(u,1-v) = -F^1(1-u,v) \text{ für } u,v \in [0,1]$$

gelten, da dann z.B.

$$\begin{aligned} u - C(u,1-v) &= u - u(1-v) - \theta F^1(u,1-v) = uv - \theta F^1(u,1-v) \\ &= uv + \theta F^1(u,v) = C(u,v) \end{aligned}$$

für $u,v \in [0,1]$ ist. Analog kann $v - C(1-u,v) = C(u,v)$ untersucht werden.

BEISPIEL: Betrachte die FGM-Copula mit

$$F^1(u,v) = u(1-u)v(1-v).$$

Dann sind

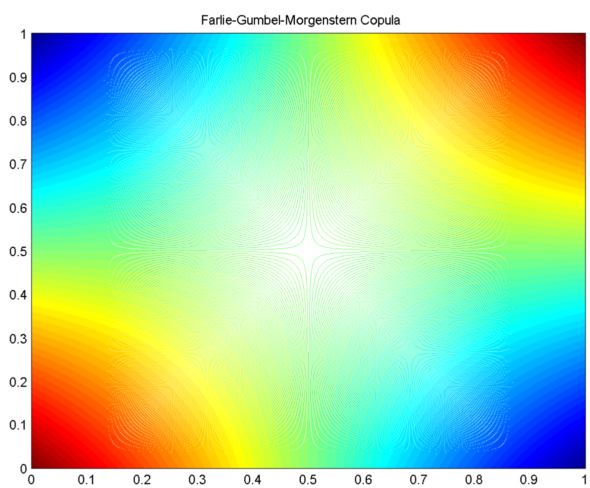
$$\begin{aligned} F^1(u,v) &= u(1-u)v(1-v) = (1-u)u(1-v)v = F^1(1-u,1-v) \\ F^1(u,v) &= u(1-u)(1-v)v = F^1(u,1-v) \\ F^1(u,v) &= (1-u)uv(1-v) = F^1(1-u,v), \end{aligned}$$

so daß

$$F^1(u,v) \neq -F^1(u,1-v) \text{ für } u,v \neq 1/2$$

ist.

D.h. die FGM-Copula ist zwar radial, aber nicht gemeinsam symmetrisch.



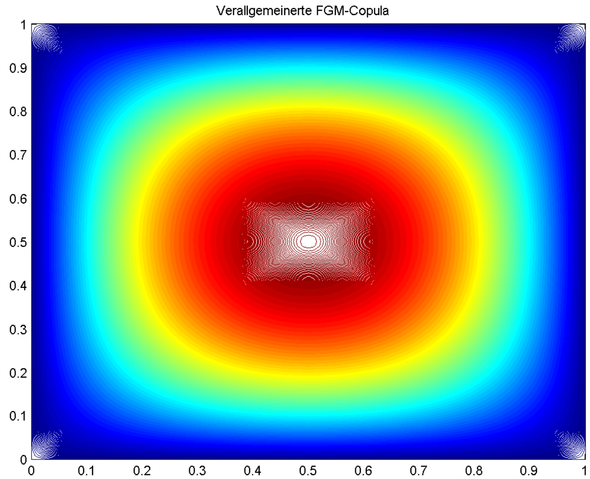
BEISPIEL: Betrachte eine verallgemeinerte FGM-Copula mit

$$F^1(u,v) = u(1-u)(1-2u)v(1-v)(1-2v).$$

Beachte: $1-2u = -(1-2(1-u))$.

Damit ist zwar $F^1(u,v) = F^1(1-u,1-v)$. Es gilt aber auch $F^1(u,v) = -F^1(u,1-v) = -F^1(1-u,v)$.

D.h. diese verallgemeinerte FGM-Copula ist gemeinsam symmetrisch.



Symmetrie der "diagonal concentrated copula"

Für

$$F^1(u,v) = \frac{4}{3}\begin{cases} u^{3/2}(1-v) + v^{3/2}(1-u) + u(1-v)^{3/2} + v(1-u)^{3/2} - (v-u) \\ -v - u + 2uv \\ u^{3/2}(1-v) + v^{3/2}(1-u)u(1-v)^{3/2} + v(1-u)^{3/2} - (u-v)^{3/2} \\ -v - u + 2uv \end{cases}$$

ist offensichtlich $F^1(u,v) = F^1(1-u, 1-v)$, da aus $0 \leq u \leq v \leq 1$ $0 \leq 1-v \leq 1-u \leq 1$ folgt und $(1-u-(1-v)) = v-u$ gilt.

Weiterhin ist

$$F^1(u,1-v) = \frac{4}{3}\begin{cases} u^{3/2}v + (1-v)^{3/2}(1-u) + uv^{3/2} + (1-v)(1-u)^{3/2} \\ -((1-v)-u)^{3/2} - (1-v) - u + 2u(1-v) \\ \qquad \text{für } 0 \leq u \leq 1-v \leq 1 \\ u^{3/2}v + (1-v)^{3/2}(1-u)uv^{3/2} + (1-v)(1-u)^{3/2} \\ -(u-(1-v))^{3/2} - (1-v) - u + 2u(1-v) \\ \qquad \text{für } 0 \leq 1-v \leq u \leq 1 \end{cases}$$

Setze $u = 1/4$ und $v = 1/3$, dann sind

$$\begin{aligned} F^1(u,v) \quad = \quad & \left(\frac{1}{4}\right)^{3/2}\left(\frac{2}{3}\right) + \left(\frac{3}{4}\right)\left(\frac{1}{3}\right)^{3/2} + \left(\frac{1}{4}\right)\left(\frac{2}{3}\right)^{3/2} \\ & \left(\frac{3}{4}\right)^{3/2}\left(\frac{1}{3}\right) - \left(\frac{1}{12}\right)^{3/2} - \left(\frac{1}{4}\right) - \left(\frac{1}{3}\right) + 2\left(\frac{1}{4}\right)\left(\frac{1}{3}\right) = 0.1395 \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} F^1(u,1-v) \quad = \quad & \left(\frac{1}{4}\right)^{3/\oplus 2}\left(\frac{1}{3}\right) + \left(\frac{3}{4}\right)\left(\frac{2}{3}\right)^{3/2} + \left(\frac{1}{4}\right)\left(\frac{1}{3}\right)^{3/2}\left(\frac{3}{4}\right)^{3/2}\left(\frac{2}{3}\right) \\ & -\left(\frac{5}{12}\right)^{3/2} - \left(\frac{1}{4}\right) - \left(\frac{2}{3}\right) + 2\left(\frac{1}{4}\right)\left(\frac{2}{3}\right) = 0.0782, \end{aligned}$$

womit $F^1(1/4,1/3) \neq -F^1(1/4,2/3)$, so daß keine gemeinsame Symmetrie vorliegt.

Symmetrie der PCC-Copula

Für die "Polygonal Covariance Characteristic"-Copula ist

$$F^1(u,v) = \begin{cases} \tilde{K}(u+v) - \tilde{K}(u-v) - 2uvK(1) & \text{für } u \geq v,\ u \leq 1-v \\ \tilde{K}(u+v) - \tilde{K}(v-u) - 2uvK(1) & \text{für } u \leq v,\ u \leq 1-v \\ \tilde{K}(2-(u+v)) - \tilde{K}(u-v) - 2(1-u)(1-v)K(1) & \text{für } u \leq v,\ u \geq 1-v \\ \tilde{K}(2-(u+v)) - \tilde{K}(v-u) - 2(1-u)(1-v)K(1) & \text{für } u \geq v,\ u \geq 1-v. \end{cases}$$

Für $u \geq v$ und $u \leq 1-v$ sind, ist $1-u \leq 1-v$ und $1-u \geq 1-(1-v)$, so daß

$$\begin{aligned} F^1(1-u,1-v) &= \tilde{K}(2-(1-u+(1-v))) - \tilde{K}(1-v-(1-u)) \\ &\quad -2(1-(1-u))(1-(1-v))K(1) \\ &= \tilde{K}(u+v) - \tilde{K}(u-v) - 2uvK(1) = F^1(u,v). \end{aligned}$$

Analog lassen sich die anderen drei Fälle abarbeiten, so daß die PCC-Copula für jede Wahl von κ radial symmetrisch ist.

Allerdings lassen sich wieder sehr einfach u und v derart wählen, daß $F^1(u,v) \neq -F^1(u,1-v)$, womit die PCC-Copula im allgemeinen keine gemeinsame Symmetrie aufweist.

Diese Ergebnisse gelten natürlich insbesondere für den Spezialfall der "Power Regression Characteristic"-Copula.

Symmetrie der allgemeinen Produktcopula

Betrachte $C(u,v;\phi,\psi) = uv + \theta\phi(u)\psi(v)$ für $u,v \in [0,1]$. Somit ist $F^1(u,v) = \phi(u)\psi(v)$.

Hinreichende und notwendige Bedingung für die radiale Symmetrie von C ist $F^1(u,v) = F^1(1-u,1-v)$ für $u,v \in [0,1]$, d.h. $\phi(u)\psi(v) = \phi(1-u)\psi(1-v)$.

Hinreichende Bedingungen für radiale Symmetrie sind offensichtlich $\phi(u) = \phi(1-u)$ und $\psi(v) = \psi(1-v)$ bzw. $\phi(u) = -\phi(1-u)$ und $\psi(v) = -\psi(1-v)$.

Ob diese Bedingungen auch notwendig sind, diskutiert die folgende Fallunterscheidung:

1. Ist $\phi(1/2) \neq 0$ folgt aus $\phi(u)\psi(v) = \phi(1-u)\psi(1-v)$ für $u,v \in [0,1]$

   $$\psi(v) = \psi(1-v) \text{ für } v \in [0,1].$$

   Dann ist aber auch $\phi(u) = \phi(1-u)$. Analog verhält es sich, wenn $\psi(1/2) \neq 0$ ist. Somit ist im Falle $\phi(1/2) \neq 0$ oder $\psi(1/2) \neq 0$ notwendig für radiale Symmetrie, daß

   $$\phi(u) = \phi(1-u) \text{ und } \psi(v) = \psi(1-v) \text{ für } u,v \in [0,1]$$

   gelten.

2. Wenn $\phi(1/2) = \psi(1/2) = 0$ ist und es existiert ein $u^* \in [0,1]$ oder ein $v^* \in [0,1]$ mit $\phi(u^*) = \phi(1-u^*)$ oder $\psi(v^*) = \psi^*(1-v^*)$, dann sind offensichtlich ebenfalls

   $$\phi(u) = \phi(1-u) \text{ und } \psi(v) = \psi(1-v) \text{ für } u,v \in [0,1]$$

notwendig sein.

3. Verbleibt der Fall $\phi(1/2) = \psi(1/2) = 0$ und $\phi(u) \neq \phi(1-u)$ und $\psi(u) \neq \psi(1-u)$ für $u \neq 1/2$. Existiert ein $u^* \in [0,1]$ oder $v^* \in [0,1]$ mit $\phi(u^*) = -\phi(1-u^*)$ oder $\psi(v^*) - \psi(1-v^*)$, dann sind

$$\phi(u) = -\phi(1-u) \ \text{ und } \ \psi(v) = -\psi(1-v) \ \text{ für } u, v \in [0,1]$$

notwendig für radiale Symmetrie.

4. Schließlich gibt es noch den Fall $\phi(1/2) = \psi(1/2) = 0$ und $|\phi(u)| \neq |\phi(1-u)|$ und $|\psi(u)| \neq |\psi(1-u)|$ für $u \neq 1/2$. Dann ist

$$\phi(u)\psi(v) = \phi(1-u)\psi(1-v) \ \text{ für } u, v \in [0,1]$$

notwendig für radiale Symmetrie.

Es sind weiterhin

$$F^1(u,v) = -F^1(u,1-v) \iff \phi(u)(\psi(v) + \psi(1-v)) = 0$$

und

$$F^1(u,v) = -F^1(1-u,v) \iff \psi(v)(\phi(u) + \phi(1-u)) = 0$$

für alle $u, v \in [0,1]$.

Wenn es ein $u^* \in [0,1]$ und ein $v^* \in [0,1]$ gibt mit $\phi(u^*) \neq 0$ und $\psi(v^*) \neq 0$, dann ist hinreichend und notwendig für die gemeinsame Symmetrie von $C(u,v;\phi,\psi)$, daß

$$\phi(u) = -\phi(1-u) \ \text{ und } \ \psi(v) = -\psi(1-v) \ \text{ für } u, v \in [0,1]$$

gelten.

Somit folgt mit $\phi(1/2) \neq 0$ bzw. $\psi(1/2) \neq 0$, daß keine gemeinsame Symmetrie vorliegen kann.

Spezialfall: Potenzcopula

Wir betrachten die Potenzcopula mit

$$\phi(u) = \frac{1}{k+1} u \left(u^k - 1\right) \ \text{ und } \ \psi(v) = \frac{1}{q+1} v \left(v^q - 1\right) \ \text{ für } u, v \in [0,1].$$

Es sind $\phi(1/2) \neq 0$ und $\psi(1/2) \neq 0$. Damit kann keine gemeinsame Symmetrie der Produktcopula vorliegen.

Für radiale Symmetrie müssen

$$\phi(u) = \frac{1}{k+1} u \left(u^k - 1\right) = \frac{1}{k+1} (1-u) \left((1-u)^k - 1\right) = \phi(1-u)$$

für alle $u \in [0,1]$ sein.

Dies kann aber nur sein, wenn

$$u^{k+1} - 2u + 1 = (1-u)^{k+1} \quad u \in [0,1]$$

ist, was nur für $k = 1$ erfüllbar ist.

D.h. nur

$$\phi(u) = \frac{1}{2}u\,(u-1) \quad \text{und} \quad \psi(v) = \frac{1}{2}v\,(v-1) \quad \text{für } u,v \in [0,1].$$

liefert eine radial symmetrische Copula.

Symmetrie der Produktcopula nach Amblard & Girard

Amblard & Girard (2000) diskutieren ebenfalls radiale und gemeinsame Symmetrie ihrer semiparametrischen Copula $C(u,v) = uv + \theta\phi(u)\phi(v)$.

Als Spezialfall der allgemeinen Produktcopula ergibt sich sofort, daß hinreichend für radiale Symmetrie ist, daß $\phi(u) = \phi(1-u)$ für $u \in [0,1]$ oder $\phi(u) = -\phi(1-u)$ für $u \in [0,1]$ gelten.

Da $\phi(u)^2 = \phi(1-u)^2$ für $u \in [0,1]$ ist, folgt für $u^* \in [0,1]$, daß entweder $\phi(u^*) = \phi(1-u^*)$ oder $\phi(u^*) = -\phi(1-u^*)$ sind.

Damit entfällt der vierte Fall, in dem für die allgemeine Produktcopula nicht gezeigt werden konnte, daß

$$\phi(u) = \phi(1-u) \quad \text{und} \quad \psi(v) = \psi(1-v) \quad \text{für } u,v \in [0,1]$$

oder

$$\phi(u) = -\phi(1-u) \quad \text{und} \quad \psi(v) = -\psi(1-v) \quad \text{für } u,v \in [0,1]$$

notwendig für radiale Symmetrie sind.

Damit ist $\phi(u) = \phi(1-u)$ für $u \in [0,1]$ oder $\phi(u) = -\phi(1-u)$ für $u \in [0,1]$ hinreichend und notwendig für radiale Symmetrie von $C(u,v;\phi)$.

Als hinreichend und notwendig für gemeinsame Symmetrie erweist sich die Bedingung $\phi(u) = -\phi(1-u)$ für $u \in [0,1]$.

Amblard & Girard (2000) geben einige Beispiele für die Funktion ϕ an, die sich bez. radialer und gemeinsamer Symmetrie klassifizieren lassen:

1. $\phi(u) = u(1-u)$ liefert radiale, aber keine gemeinsame Symmetrie für $-1 \leq \theta \leq 1$.

2. $\phi(u) = u(1-u)(1-2u)$ ergibt eine Copula mit gemeinsamer Symmetrie für $-1 \leq \theta \leq 1$.

3. $\phi(u) = -u\ln u$ führt zu keiner radial symmetrischen Copula für $0 \leq \theta \leq 0.3769$.

Produktcopula nach Fischer

Der Ansatz von Fischer schließt zunächst gemeinsam symmetrische Copulas aus, da $-f(F^{-1}(1-u)) \leq 0$ für alle $u \in [0,1]$ sein muß.

Ausgehend von einer um 0 symmetrischen Dichtefunktion ist allerdings

$$f(F^{-1}(u)) = f(F^{-1}(1-u)) \text{ für } u \in [0,1],$$

so daß dann radiale Symmetrie vorliegen muß. Umgekehrt folgt aus dieser Bedingung, daß die zugrunde liegende Dichte symmetrisch um 0 sein muß.

Abhängigkeitseigenschaft

Seien (X,Y) Zufallsvariablen mit der gemeinsamen Verteilung $F_{X,Y}$ und der gemeinsamen Dichte $f_{X,Y}$.

1. PFD: X und Y heißen "positive function dependent", wenn für jede integrierbare reellwertige Funktion g gilt:

$$Cov(g(X)g(Y)) = E(g(X)g(Y)) - E(g(X))E(g(Y)) \geq 0.$$

2. PQD: X und Y heißen "positive quadrant dependent", wenn gilt:

$$P(X \leq x, Y \leq y) \geq P(X \leq x)P(Y \leq y) \text{ für alle } x, y \in \mathbb{R}.$$

3. $LTD(Y|X)$: Y heißt "left tail decreasing in X", wenn gilt:

$$P(Y \leq y | X \leq x) \text{ ist nicht abnehmend in } x \text{ für alle } y \in \mathbb{R}.$$

4. $RTI(Y|X)$: Y heißt "right tail increasing in X", wenn gilt:

$$P(Y > y | X > x) \text{ ist nicht abnehmend in } x \text{ für alle } y \in \mathbb{R}.$$

5. $SI(Y|X)$: Y heißt "stochastically increasing in X", wenn gilt:

$$P(Y > y | X = x) \text{ ist nicht abnehmend in } x \text{ für alle } y \in \mathbb{R}.$$

6. $LCSD$: X und Y heißen "left corner set decreasing", wenn gilt:

$$P(X \leq x, Y \leq y | X \leq x', Y \leq y') \text{ ist nicht zunehmend in } x' \text{ und } y'$$

für alle $x, y \in \mathbb{R}$.

7. $RCSI$: X und Y heißen "right corner set increasing", wenn gilt:

$$P(X > x, Y > y | X > x', Y > y') \text{ ist nicht abnehmend in } x' \text{ und } y'$$

für alle $x, y \in \mathbb{R}$.

8. $TP2$: (X,Y) besitzen die "total positivity of order 2-Eigenschaft, wenn gilt:

$$f_{X,Y}(x_1,y_1)f_{X,Y}(x_2,y_2) - f_{X,Y}(x_1,y_2)f_{X,Y}(x_2,y_1)$$

für alle $x_1, x_2, y_1, y_2 \in \mathbb{R}$ mit $x_1 \leq x_2$ und $y_1 \leq y_2$.

X, Y werden auch likelihood ratio dependent (LRD) genannt.

Abhängigkeitseigenschaften von Copulas

- Bedingungen für Tail-Monotonie:

$$LTD(Y|X) \iff \frac{C(u,v)}{u} \text{ nichtzunehmend in } u$$

bzw.

$$LTD(Y|X) \iff P(V \leq v|U=u) = \frac{\partial C(u,v)}{\partial u} \leq \frac{C(u,v)}{u}.$$

und

$$RTI(Y|X) \iff \frac{1-u-v-C(u,v)}{1-u} \text{ nichtabnehmend in } u$$

bzw.

$$RTI(Y|X) \iff \frac{v-C(u,v)}{1-u} \text{ nichtzunehmend in } u$$

bzw.

$$RTI(Y|X) \iff P(V \leq v|U=u) = \frac{\partial C(u,v)}{\partial u} \geq \frac{v-C(u,v)}{1-u}.$$

- Stochastically Increasing:

$$SI(Y|X) \iff P(V \leq v|U=u) = \frac{\partial C(u,v)}{\partial u} \text{ nicht zunehmend in } u$$

bzw.

$$SI(Y|X) \iff C(u,v) \text{ konkav in } u$$

- Corner Set Eigenschaften:

$$LCSD(X,Y) \iff C(u,v)C(u',v') \geq C(u,v')C(u',v)$$

für alle $u,u',v,v' \in [0,1]$ mit $u<u', v<v'$.

bzw.

$$RCSI(X,Y) \iff \overline{C}(u,v)\overline{C}(u',v') \geq \overline{C}(u,v')\overline{C}(u',v)$$

für alle $u,u',v,v' \in [0,1]$ mit $u<u', v<v'$.

Beachte:

$$LCSD(X,Y) \iff C \text{ ist TP2}$$

und

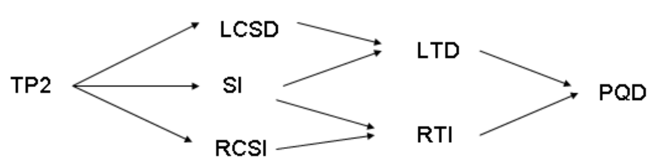
$$RCSI(X,Y) \iff \hat{C} \text{ ist TP2.}$$

- Totally Positivity of order 2 (TP2):

$$\begin{vmatrix} c(u,v) & c(u,v') \\ c(u',v) & c(u',v') \end{vmatrix} \geq 0$$

für alle $u < u', v < v'$.

- Übersicht der Zusammenhänge:



- Beachte: Die PQD-Eigenschaft ist die schwächste Eigenschaft, die aus allen anderen folgt.

  D.h.: Liegt sie nicht vor, kann auch keine der anderen Abhängigkeitseigenschaften erfüllt sein.

Abhängigkeitseigenschaften von Rüschendorf-Copulas

Allgemeine Voraussetzung: $\theta > 0$.

- X und Y sind im allgemeinen nicht PFD,

$$\begin{aligned} Cov(g(X)g(Y)) &= Cov(g(F^{-1}(U)), g(F^{-1}(V)) \\ &= \theta \int\int g(u)g(v)f^1(u,v)dudv. \end{aligned}$$

- Positive Quadranten Eigenschaft (PQD):

$$PQD(X,Y) \iff \theta F^1(u,v) \geq 0 \text{ für } u,v \in [0,1]$$

- Tail-Monotonie:

$$\begin{aligned} LTD(X,Y) &\iff \theta \frac{F^1(u,v)}{u} \text{ monoton nichtzunehmend in } u \\ &\iff \frac{\partial F^1(u,v)}{\partial u} \leq \frac{F^1(u,v)}{u}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} RTI(X,Y) &\iff \theta \frac{F^1(u,v)}{1-u} \text{ monoton nichtabnehmend in } u \\ &\iff \frac{\partial F^1(u,v)}{\partial u} \geq \frac{F^1(u,v)}{1-u}. \end{aligned}$$

- Stochastically Increasing:

$$SI(Y|X) \iff \theta \frac{\partial^2 F^1(u,v)}{\partial u^2} \leq 0.$$

D.h. für $\theta > 0$ muß $F^1(u,v)$ konkav und für $\theta < 0$ konvex in u sein.

- Corner Set Eigenschaften:

$$\begin{aligned} LCSD(X,Y) \iff\ & \theta(F^1(u_2,v_2)F^1(u_1,v_1) - F^1(u_1,v_2)F^1(u_2,v_1)) \\ & \geq -u_2v_2F^1(u_1,v_1) - u_1v_1F^1(u_2,v_2) \\ & +u_1v_2F^1(u_2v_1) - u_2v_1F^1(u_1v_2) \end{aligned}$$

für $u_1, u_2, v_1, v_2 \in [0,1]$ mit $u_1 < u_2$, $v_1 < v_2$.

Die TP2-Eigenschaft für F^1 reicht nicht aus, um die LCSD-Eigenschaft zu sichern.

Für die RCSI-Eigenschaft wird

$$\begin{aligned} \hat{C}(u,v) &= u - (1-v) + (1-u)(1-v) + \theta F^1(1-u, 1-v) \\ &= (1-u)(1-v) + \theta F^1(1-u, 1-v) \end{aligned}$$

benötigt.

- Totally Positivity of order 2 (TP2):

$$TP2(X,Y) \iff \theta(f^1(u_2,v_2)f^1(u_1,v_1) - f^1(u_1,v_2)f^1(u_2,v_1)) \geq -f^1(u_1,v_1) - f^1(u_2,v_2) + f^1(u_2v_1) - f^1(u_1v_2).$$

Abhängigkeitseigenschaften von Produktcopulas

Allgemeine Voraussetzung: $\theta > 0$.

- X und Y sind im allgemeinen nicht PFD,

$$\begin{aligned} Cov(g(X)g(Y)) &= Cov(g(F^{-1}(U)), g(F^{-1}(V)) \\ &= \theta \int\int g(u)g(v)\phi'(u)\psi'(v)dudv \\ &= \theta \int_0^1 g(u)\phi'(u)du \int_0^1 g(v)\psi'(v)dv \end{aligned}$$

Hinreichende und notwendige Bedingung für die PQD-Eigenschaft:

$$PQD(X,Y) \iff \theta\phi(u)\psi(v) \geq 0$$

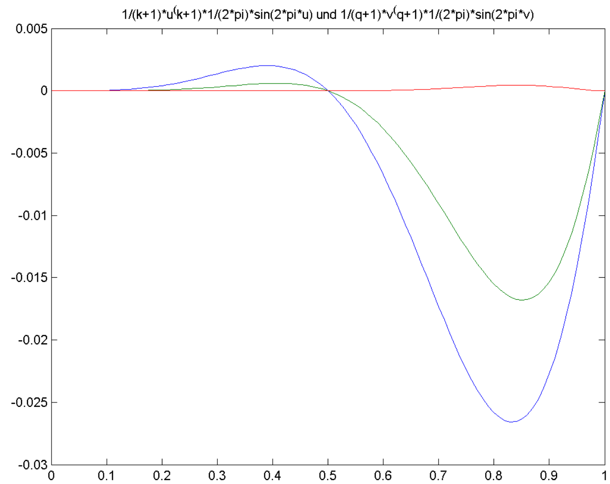
Daß nicht jede Produktcopula doe PQD-Eigenschaft besitzt, zeigen die Beispiel der Copulas mit fixem und variablem Nullpunkt.

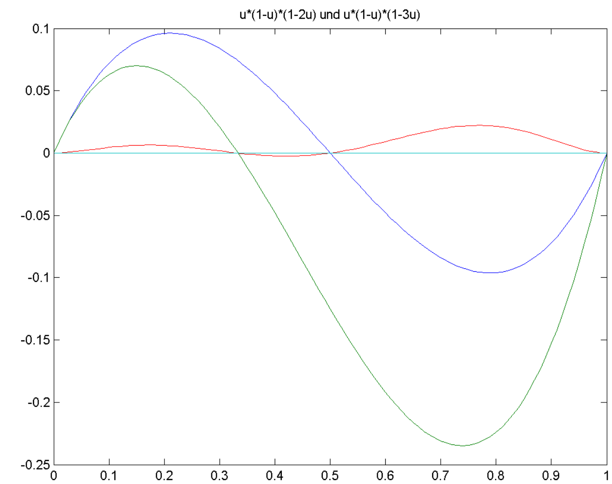
Notwendige Bedingung für die PQD-Eigenschaft:

$$PQD(X,Y) \Longrightarrow \theta\phi(u)\psi(u) \geq 0$$

D.h.: sign$(\phi(u))$ = sign$(\psi(u))$.

Diese notwendige Bedingung wird von der Copula mit festem Nullpunkt, aber nicht von der Copula mit variablem Nullpunkt erfüllt.





- Beachte: Wenn aber sign$(\phi(u)) \neq$ sign$(\psi(u))$, dann gilt nicht $PQD(X,Y)$ und damit auch keine der anderen Abhängigkeitseigenschaften außer u.U. $PFD(X,Y)$.

- Sei $\phi(u^*) \neq 0$ für ein $u^* \in [0,1]$ und $\psi(v^*) \neq 0$ für ein $v^* \in [0,1]$.

  Eine hinreichende und notwendige Bedingung für $PQD(X,Y)$ liefert:

$$\phi(u) \geq 0 \text{ und } \psi(v) \geq 0 \text{ für } u,v \in [0,1]$$

  oder

$$\phi(u) \leq 0 \text{ und } \psi(v) \leq 0 \text{ für } u,v \in [0,1]$$

Beweis: Sei $\phi(u)\psi(v) \geq 0$ für alle $u,v \in [0,1]$.

1. Wenn es ein u^* gibt mit $\phi(u^*) > 0$, dann ist $\psi(v) \geq 0$ für alle $v \in [0,1]$.
2. Wenn es ein u^* gibt mit $\phi(u^*) < 0$, dann ist $\psi(v) \leq 0$ für alle $v \in [0,1]$.
3. Wenn es ein v^* gibt mit $\psi(v^*) > 0$, dann ist $\phi(u) \geq 0$ für alle $u \in [0,1]$.
4. Wenn es ein v^* gibt mit $\phi(u^*) < 0$, dann ist $\phi(u) \leq 0$ für alle $u \in [0,1]$.

Da die PQD-Eigenschaft eine notwendige Bedingung für die anderen Abhängigkeitseigenschaften ist, wird im folgenden vorausgesetzt, daß ϕ und ψ entweder gemeinsam nichtnegativ oder gemeinsam nichtpositiv sind.

BEISPIEL: Potenzcopula

$$\phi(u) = u(u^k - 1) \le 0 \text{ und } \psi(v) = v(v^q - 1) \le 0$$

für $u, v \in [0,1]$.

- Tail-Monotonie: Setzt man

$$F^1(u,v) = \phi(u)\psi(v)$$

in die hinreichende und notwendige Bedingung für die LTD- und RTI-Eigenschaft ein, folgt sofort

$$LTD(Y|X) \iff \frac{F^1(u,v)}{u} \text{ monoton nichtzunehmend in } u$$
$$\iff \frac{\phi(u)}{u}\psi(v) \text{ monoton nichtzunehmend in } u$$

1. Wenn ψ nichtnegativ ist, muß $\phi(u)/u$ monoton nichtzunehmend sein.
2. Wenn ψ nichtpositiv ist, muß $\phi(u)/u$ monoton nichtabnehmend sein.

D.h.

$$LTD(Y|X) \iff \phi(u)/u \text{ monoton.}$$

$$LTD(X|Y) \iff \psi(v)/v \text{ monoton.}$$

$LTD(X|Y)$ und $LTD(Y|X)$ $\iff$ $\phi(u)/u$ und $\psi(v)/v$ gemeinsam nichtabnehmend oder gemeinsam nichtzunehmend.

$$RTI(Y|X) \iff \frac{F^1(u,v)}{1-u} \text{ monoton nichtzunehmend in } u$$
$$\iff \frac{\phi(u)}{1-u}\psi(v) \text{ monoton nichtzunehmend in } u$$

$RTI(X|Y)$ und $RTI(Y|X)$ $\iff$ $\phi(u)/(1-u)$ und $\psi(v)/(1-v)$ gemeinsam monoton nichtabnehmend oder gemeinsam nichtzunehmend.

BEISPIEL: Potenzcopula

$$\phi(u)/u = u^k - 1 \ \text{ monoton nichtabnehmend in } u$$

bzw.

$$\phi(u)/(1-u) = u\frac{u^k - 1}{1-u} = \ \text{ monoton nichtabnehmend in } u,$$

da $(u^k - 1)$ und $u/(1-u)$ monoton nichtabnehmend sind, ist die Potenzcopula LTD und RTI-abhängig.

- Stochastically Increasing:

$$\begin{aligned} SI(Y|X) \quad &\Longleftrightarrow \quad \frac{\partial^2 F^1(u,v)}{\partial u^2} \leq 0 \\ &\Longleftrightarrow \quad \psi(v)\phi''(u) \leq 0. \end{aligned}$$

Da $\psi(v) \geq 0$ für alle $v \in [0,1]$ oder $\psi(v) \leq 0$ für alle $v \in [0,1]$ sein muß, gilt

$$SI(Y|X) \Longleftrightarrow \phi \text{ konkav oder konvex.}$$

Da ϕ und ψ überall gemeinsam nichtnegativ oder überall gemeinsam nichtpositiv sind, folgt:

$$SI(Y|X) \text{ und } SI(X|Y) \quad \Longleftrightarrow \quad \phi \text{ und } \psi$$

gemeinsam konkav oder gemeinsam konvex

BEISPIEL: Potenzcopula

Es sind $\psi(v) \leq 0$ für $v \in [0,1]$ und

$$\phi''(u) = (k+1)ku^{k-1} \geq 0 \ \text{ für } u \in [0,1].$$

- Corner Set Eigenschaft $LCSD$:

$$\begin{aligned} LCSD(X,Y) \quad \Longleftrightarrow \quad & \theta(F^1(u_2,v_2)F^1(u_1,v_1) - F^1(u_1,v_2)F^1(u_2,v_1)) \\ & \geq -u_2v_2F^1(u_1,v_1) - u_1v_1F^1(u_2,v_2) \\ & +u_1v_2F^1(u_2v_1) - u_2v_1F^1(u_1v_2) \end{aligned}$$

für $u_1, u_2, v_1, v_2 \in [0,1]$ mit $u_1 < u_2$, $v_1 < v_2$.

D.h.

$$\begin{aligned}LCSD(X,Y) \quad &\Longleftrightarrow \quad \phi(u_2)\psi(v_2)\phi(u_1)\psi(v_1) - \phi(u_1)\psi(v_2)\phi(u_2)\psi(v_1)\\ &\geq \quad \frac{1}{\theta}(-u_2v_2\phi(u_1)\psi(v_1) - u_1v_1\phi(u_2)\psi(v_2) + u_1v_2\phi(u_2)\psi(\end{aligned}$$

für $u_1, u_2, v_1, v_2 \in [0,1]$ mit $u_1 < u_2$, $v_1 < v_2$.

Dann ist

$$LCSD(X,Y) \Longleftrightarrow \left(\frac{\phi(u_2)}{u_2} - \frac{\phi(u_1)}{u_1}\right)\left(\frac{\psi(v_2)}{v_2} - \frac{\psi(v_1)}{v_1}\right) u_1u_2v_1v_2 \geq 0$$

für $u_1, u_2, v_1, v_2 \in [0,1]$ mit $u_1 < u_2$, $v_1 < v_2$.

Wenn $\phi(u_2)/u_2 \geq \phi(u_1)/u_1)$ ist, dann folgt $\psi(v_2)/v_2 \geq \psi(v_1)/v_1$ für alle $v_1 < v_2$, so daß $\psi(v)/v$ monoton nichtabnehmend ist. Insgesamt gilt:

$$\begin{aligned}LCSD(X,Y) \quad &\Longleftrightarrow \quad \phi(u)/u \text{ und } \psi(v)/v\\ &\qquad \text{gemeinsam nichtabnehmend oder}\\ &\qquad \text{gemeinsam nicht zunehmend}\\ &\Longleftrightarrow \quad LTD(Y|X) \text{ und } LTD(X|Y).\end{aligned}$$

BEISPIEL: Potenzcopula

Die gleichgerichtete Monotonie von $\phi(u)/u = u^k - 1$ und $\psi(v) = v^q - 1$ sichert $LCSD(X,Y)$.

- Corner Set Eigenschaft $RCSI$:

  Analog $RSCI(X,Y)$:

$$\begin{aligned}RCSI(X,Y) \quad &\Longleftrightarrow \quad \phi(u)/(1-u) \text{ und } \psi(v)/(1-v)\\ &\qquad \text{gemeinsam nichtabnehmend oder}\\ &\qquad \text{gemeinsam nicht zunehmend}\\ &\Longleftrightarrow \quad RTI(Y|X) \text{ und } RTI(X|Y).\end{aligned}$$

- Totally Positivity of Order 2 (TP2):

  Es ist
  $$f^1(u,v) = \phi'(u)\psi'(v),$$
  so daß
  $$TP2(X,Y) \iff (\phi'(u_2) - \phi'(u_1)(\psi'(v_2) - \psi'(v_1)) \geq 0$$
  für $u_1 \leq u_2$ und $v_1 \leq v_2$.

  Damit müssen ϕ' und ψ' gemeinsam monoton nichtabnehmend oder gemeinsam monoton nichzunehmend sein, so daß gilt:

$$\begin{aligned} TP2(X,Y) \quad &\iff \quad \phi \text{ und } \psi \\ & \quad \text{gemeinsam konvex oder gemeinsam konkav} \\ &\iff \quad SI(Y|X) \text{ und } SI(X|Y). \end{aligned}$$

Zusammenfassung:

$$\begin{tikzcd}
 & & LCSD \arrow[r, Leftrightarrow] & LTD \arrow[dr] & & \\
TP2 \arrow[r, Leftrightarrow] & SI \arrow[ur] \arrow[dr] & & & PQD \arrow[r] & PFD \\
 & & RCSI \arrow[r, Leftrightarrow] & RTI \arrow[ur] & &
\end{tikzcd}$$

Abhängigkeitseigenschaften von Produktcopulas nach Amblard & Girard

Die Bedingungen für die Abhängigkeitseigenschaften entsprechen bis auf eine Ausnahme denen der Produktcopulas.

Ausnahme: Produktcopulas nach Amblard & Girard besitzen stets die PFD-Eigenschaft.

$$\begin{aligned} Cov(g(X)g(Y)) &= Cov(g(F^{-1}(U)), g(F^{-1}(V)) = \theta \int\int g(u)g(v)\phi'(u)\phi'(v) \\ &= \theta \left(\int_0^1 g(u)\phi'(u)du \right)^2 \geq 0. \end{aligned}$$

Abhängigkeitseigenschaften von Produktcopulas nach Fischer

Werden ϕ und ψ durch Dichtefunktionen f bzw. g entsprechend
$$\phi(u) = f(F^{-1}(u)) \geq 0 \text{ für alle } u \in [0,1]$$
und
$$\psi(v) = g(G^{-1}(u)) \geq 0 \text{ für alle } v \in [0,1]$$
erzeugt, folgt sofort die PQD-Eigenschaft, da $\phi(u)\psi(v) \geq 0$ für $u, v \in [0,1]$ ist.

Sind $f'/f(F^{-1}(u))$ und $g'/g(G^{-1}(v))$ gemeinsam monoton nichtabnehmend oder gemeinsam monoton nichtzunehmend, dann folgen die $TP2$- und damit alle anderen Abhängigkeitseigenschaften.

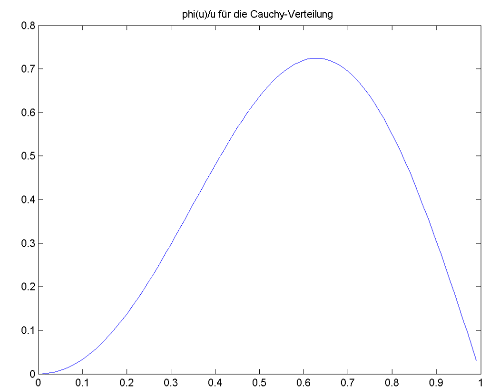
BEISPIEL: Für die Cauchy-Verteilung sind

$$f(F^{-1}(u)) = \frac{1}{\pi}\frac{1}{1+(\tan(\pi*(u-1/2)))^2}$$

und

$$\frac{f'}{f}(F^{-1}(u)) = -\sin(2\pi u),$$

so daß keine LTD- und keine $TP2$-Eigenschaft vorliegen kann.



Problem: Wähle f, so daß LTD- aber keine $TP2$-Eigenschaft vorliegt.

Globale Abhängigkeitsmaße

- (Linearer) Korrelationskoeffizient
- Volumenmaß
- Rangkorrelationskoeffizient von Spearman
- Pangkorrelationsloeffizient von Kendall
- Rangkorrelationskoeffizient von Blest

(Linearer) Korrelationskoeffizient (allgemein)

$$\text{corr}(X_1, X_2) = E\left(\frac{X_1-\mu_1}{\sigma_1}\frac{X_2-\mu_2}{\sigma_2}\right)$$

Grenzen des linearen Korrelationskoeffizienten für Produktcopulas

$$f(x_1,x_2) = f_1(x_1)f_2(x_2)(1+\theta\phi^*(x_1)\psi^*(x_2))$$

mit

$$\int \phi^*(x_1)f_1(x_1)dx_1 = \int \psi^*(x_2)f_2(x_2)dx_2 = 0.$$

und

$$\phi^*(x_1) = \phi(F_1(x_1)) \text{ und } \psi^*(x_2) = \psi(F_2(x_2))$$

bzw.

$$\phi(u) = \phi^*(F_1^{-1}(u)) \text{ und } \psi(v) = \psi(F_2^{-1}(v))$$

Linearer Korrelationskoeffizient (Lee (1996)):

$$\text{corr}(X_1,X_2) = \theta\frac{\int_0^1 F_1^{-1}(u)\phi(u)du \int_0^1 F_2^{-1}(v)\psi(v)dv}{\sigma_1\sigma_2}$$

Seien $-1 \le -h_1 \le \phi(u) \le 1$ und $-1 \le -h_2 \le \psi(v) \le 1$ und setze

$$\begin{aligned} L(h_i) &= -E\left(\frac{X_i-\mu_i}{\sigma_i}|F_i(X) \ge \frac{h}{1+h}\right) \\ U(h_i) &= -E\left(\frac{X_i-\mu_i}{\sigma_i}|F_i(X) \le \frac{h}{1+h}\right), \end{aligned}$$

dann sind (Shubina & Lee (1994)):

$$L(h_1) \le \frac{\int_0^1 F_1^{-1}(u)\phi(u)du}{\sigma_1} \le U(h_1)$$

und

$$L(h_2) \le \frac{\int_0^1 F_2^{-1}(v)\psi(v)dv}{\sigma_2}.$$

Setze weiterhin

$$L(h_1,h_2) = \min(L_1(h_1)U_2(h_2), L_2(h_2)U_1(h_1))$$

und

$$U(h_1,h_2) = \max(L_1(h_1)L_2(h_2), U_1(h_1)U_2(h_2)),$$

dann ist

$$\min\left(-U(h_1,h_2), \frac{L(h_1,h_2)}{\max(h_1,h_2)}\right) \le \text{corr}(X_1,X_2) \le \max\left(-L(h_1,h_2), \frac{U(h_1,h_2)}{\max(h_1,h_2)}\right)$$

BEISPIEL: Exponentialverteilung

$$L(h) = -\ln(1+h) \ \text{ und} U(h) = h\ln((1+h)/h).$$

$$-0.4804 \leq \mathsf{corr}(X_1, X_2) \leq 0.6476 \ \ (\text{für } h = 0.2550).$$

Spezialfall: Symmetrische Dichten

$$-\frac{U(h_1,h_2)}{\max(h_1,h_2)} \leq \mathsf{corr}(X_1, X_2) \leq \frac{U(h_1,h_2)}{\max(h_1,h_2)}.$$

Maximal erreichbarer Bereich für den linearen Korrelationskoeffizienten:

$$-\max_h \frac{U(h,h)}{h} \leq \mathsf{corr}(X_1, X_2) \leq \max_h \frac{U(h,h)}{h}.$$

BEISPIEL: $[0,1]$-Rechteckverteilung

$$\frac{U(h,h)}{h} = \frac{3h}{1+h)^2},$$

ist monoton zunehmend auf $[0,1]$, so daß für $h = 1$

$$-\frac{3}{4} \leq \mathsf{corr}(X_1, X_2) \leq \frac{3}{4}.$$

BEISPIEL: Normalverteilung

$$-\frac{2}{\pi} \leq \mathsf{corr}(X_1, X_2) \leq \frac{3}{4}.$$

Maße, die nur von der Copula abhängen

1. Normalisiertes Volumen zwischen den Graphen der gemeinsamen Verteilung $F_{X,Y}$ dem Produkt der Randverteilungen $F_X F_Y$

$$\sigma = 12 \int_0^1 \int_0^1 |C(u,v) - uv| dudv.$$

2. Rangkorrelationskoeffizient von Spearman

$$\rho = 12 \int_0^1 \int_0^1 (C(u,v) - uv) dudv = \text{corr(U,V)}.$$

3. Rangkorrelationskoeffizient von Kendall

$$\tau = 4 \int_0^1 \int_0^1 C(u,v) c(u,v) dudv - 1$$

4. Maß von Blest

$$\nu = 2 - 12 \int_0^1 \int_0^1 (1-u)^2 v c(u,v) dudv.$$

Beachtet man, daß $\int_0^1 \int_0^1 uvdudv = 1/4$ ist, kann auch

$$\tau = 4 \int_0^1 \int_0^1 (C(u,v)c(u,v) - uv) dudv$$

geschrieben werden.

Abhängigkeitsmaße für die Rüschendorf-Copula

Sei $C(u,v) = uv + \theta F^1(u,v)$, dann ist das normalisierte Volumen σ sofort als Funktion von θ und der Funktion F^1 zu erkennen:

$$\sigma = 12|\theta| \int_0^1 \int_0^1 |F^1(u,v)| dudv.$$

Offensichtlich erlaubt σ keine Aussage über die Richtung der Abhängigkeit, da es immer ein positives Vorzeichen besitzt.
Der Spearmansche Rangkorrelationskoeffizient ist ebenfalls sehr einfach als

$$\rho = 12\theta \int_0^1 \int_0^1 F^1(u,v) dudv$$

darstellbar.

Etwas komplizierter gestaltet sich der Rangkorrelationskoeffizient von Kendall

$$\tau = 4 \int_0^1 \int_0^1 ((uv + \theta F^1(u,v))(1 + \theta f^1(u,v)) - uv) dudv.$$

Beachtet man, daß mittels partieller Integration

$$\begin{aligned}
\int_0^1 u \left(\int_0^1 v f^1(u,v) dv \right) du &= \int_0^1 \left(u \left[v \int_0^v f^1(u,y) dy \right]_0^1 - \int_0^1 \int_0^v f^1(u,y) dy dv \right) du \\
&= - \left(\int_0^1 \int_0^v \left(\left[u \int_0^u f^1(x,y) dx \right]_0^1 - \int_0^1 \int_0^u f^1(x,y) dx du \right) dy dv \right) \\
&= \int_0^1 \int_0^v \int_0^1 \int_0^1 f^1(x,y) dx du dy dv \\
&= \int_0^1 \int_0^1 F^1(u,v) dudv
\end{aligned}$$

wegen $\int_0^1 f^1(x,y)dx = \int_0^1 f^1(x,y)dy = 0$ und

$$\int_0^1 \int_0^1 f^1(u,v)F^1(u,v)dvdu = -\int_0^1 \int_0^1 \frac{\partial F^1(u,v)}{\partial u}\frac{\partial F^1(u,v)}{\partial v}dudv$$

wegen $F^1(u,0) = F^1(u,1) = 0$ sind, dann lautet

$$\begin{aligned} \tau &= 8\theta \int_0^1 \int_0^1 F^1(u,v)dudv + 4\theta^2 f^1(u,v)F^1(u,v)dudv \\ &= \frac{2}{3}\rho - 4\theta^2 \int_0^1 \int_0^1 \frac{\partial F^1(u,v)}{\partial u}\frac{\partial F^1(u,v)}{\partial v}dudv. \end{aligned}$$

Spezialfall: Symmetrie

Zu beachten ist, daß der Rangkorrelationskeoffizient von Spearman für eine gemeinsam symmetrische Copula den Wert 0 annimmt, wie die folgende Überlegung zeigt:

$$\begin{aligned} \int_0^1\int_0^1 F^1(u,v)dudv &= \int_0^{1/2}\int_0^{1/2} F^1(u,v)dudv + \int_0^{1/2}\int_{1/2}^1 F^1(u,v)dudv \\ &\quad + \int_{1/2}^1\int_0^{1/2} F^1(u,v)dudv + \int_{1/2}^1\int_{1/2}^1 F^1(u,v)dudv \\ &= \int_0^{1/2}\int_0^{1/2} F^1(u,v)dudv - \int_0^{1/2}\int_{1/2}^0 F^1(u,1-v)dudv \\ &\quad - \int_{1/2}^0\int_0^{1/2} F^1(1-u,v)dudv + \\ &\quad \int_{1/2}^0\int_{1/2}^0 F^1(1-u,1-v)dudv \\ &= \int_0^{1(2}\int_0^{1/2} \Big(F^1(u,v) + F^1(u,1-v) + F^1(1-u,v) \\ &\quad + F^1(1-u,1-v)\Big)\,dudv \\ &= 0, \end{aligned}$$

wegen

$$F^1(u,v) = -F^1(u,1-v) = -F^1(1-u,v) = F^1(1-u,1-v) \text{ für } u,v \in [0,1/2].$$

Mit einer analogen Überlegung und der Tatsache, daß bei gemeinsamer Symmetrie

$$f^1(u,v) = f^1(u,1-v) = f^1(1-u,v) = f^1(1-u,1-v) \text{ für } u,v \in [0,1/2]$$

gilt, folgt $\tau = 0$ für eine gemeinsam symmetrische Copula.

Allgemeine Produktcopula

Ausgehend von

$$\int_0^1 \int_0^1 F^1(u,v)dudv = \int_0^1 \phi(u)du \int_0^1 \psi(v)dv$$

und

$$\int_0^1 \int_0^1 |F^1(u,v)|dudv = \int_0^1 |\phi(u)|du \int_0^1 |\psi(v)|dv$$

sind

$$\sigma = 12|\theta| \int_0^1 |\phi(u)|du \int_0^1 |\psi(v)|dv$$

und

$$\rho = 12\theta \int_0^1 \phi(u)du \int_0^1 \psi(v)dv.$$

Für den Rangkorrelationskoeffizienten von Kendall wird

$$\begin{aligned}\int_0^1 \int_0^1 f^1(u,v)F^1(u,v)dudv &= \int_0^1 \int_0^1 \phi'(u)\psi'(v)\phi(u)\psi(v)dudv \\ &= \int_0^1 \phi'(u)\phi(u)du \int_0^1 \psi'(v)\psi(v)dv \\ &= 0\end{aligned}$$

benötigt. Dieses Ergebnis erhält man mittels partieller Integration

$$\int_0^1 \phi'(u)\phi(u)du = \left[\phi(u)^2\right]_0^1 - \int_0^1 \phi'(u)\phi(u)du,$$

womit

$$\int_0^1 \int_0^1 \phi'(u)\phi(u)du = \frac{1}{2}\left(\phi(1)^1 - \phi(0)^2\right) = 0$$

wegen $\phi(0) = \phi(1) = 0$. Damit ist

$$\tau = \frac{2}{3}\rho.$$

BEISPIEL: Potenzcopula

$$\begin{aligned}\int_0^1 \phi(u)du &= \int_0^1 \frac{1}{k+1}u(u^k-1)du \\ &= \frac{1}{k+1}\left(\frac{1}{k+2} - \frac{1}{2}\right) \\ &= -\frac{k}{2(k+1)(k+2)}\end{aligned}$$

und analog

$$\int_0^1 \psi(v)dv = -\frac{1}{2(q+1)(q+2)},$$

so daß

$$\rho = 12\theta \frac{k}{2(k+1)(k+2)} \frac{q}{2(q+1)(q+2)}$$

ist.

Da $\phi(u) = 1/(k+1)u(u^{k+1}-1) \leq 0$ für $u \in [0,1]$ falls $k \geq 1$ und damit auch $\psi(v) \leq 0$ für $v \in [0,1]$ falls $q \geq 1$, folgt

$$\sigma = \mathrm{sign}(\theta)\rho.$$

Produktcopula nach Amblard & Girard

Das Ergebnis der allgemeinen Produktcopula läßt sich unmittelbar auf die semiparametrische Copula von Amblard & Girard übertragen.
Es sind

$$\sigma = 12|\theta| \left(\int_0^1 |\phi(u)| du \right)^2$$

und

$$\rho = 12\theta \left(\int_0^1 \phi(u) du \right)^2$$

und

$$\tau = \frac{2}{3}\rho.$$

BEISPIEL:

1. Sei $\phi(u) = u(1-u)$ für $u \in [0,1]$, dann ist

$$\int_0^1 \phi(u) du = \int_0^1 |\phi(u)| du = \frac{1}{6},$$

womit

$$\rho = \frac{1}{3}\theta.$$

folgt.

2. Für $\phi(u) = u(1-u)(1-2u)$ ist

$$\int_0^1 \phi(u) du = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} - \frac{2}{3} + \frac{1}{2} = 0,$$

so daß $\rho = \tau = 0$ sind.

Dieses Ergebnis folgt aus der gemeinsamen Symmetrie der zugehörigen Copula.

Wegen

$$\int_0^1 |\phi(u)| du = \int_0^{1/2} u(1-u)(1-2u) du + \int_{1/2}^1 u(1-u)(2u-1) du =$$

ist jedoch $\sigma = 12|\theta| \frac{1}{16} = \frac{3}{4}|\theta|$.

Dichtegenerierte Produktcopula nach Fischer

Für den Vorschlag von Fischer gilt

$$\phi(u) = f(F^{-1}(u)) \geq 0 \text{ für } u \in [0,1],$$

so daß

$$\begin{aligned} \rho &= 12\theta \left(\int_0^1 f(F^{-1}(u))du \right)^2 = 12\theta \left(\int_{-\infty}^{\infty} f(z)dz \right)^2 \\ &= \text{sign}(\theta)\sigma \\ &= \frac{3}{2}\tau \end{aligned}$$

ist.

BEISPIEL: Für die Extremwertverteilung ist

$$f(F^{-1}(u)) = -u \ln u \text{ für } u \in [0,1],$$

so daß

$$\int_0^1 -u \ln u du = \left[-\frac{1}{2}u^2 \ln u \right]_0^1 - \int_0^1 -\frac{1}{2}u^2 \frac{1}{u} du = \frac{1}{4}$$

gilt.
Damit sind

$$\rho = \frac{3}{4}\theta \text{ und } \tau = \frac{1}{2}\theta.$$

Tailindizes

Ausgangspunkt:

$$\overline{\chi}_U(u) = \frac{P(U > u)P(V > u)}{P(U > u, V > u)} - 1 = \frac{(1-u)^2}{1 - 2u + C(u,u)} - 1$$

für $u \to 1$;

$$\overline{\chi}_L(u) = \frac{P(U < u)P(V < u)}{P(U < u, V < u)} - 1 = \frac{u^2}{C(u,u)} - 1$$

für $u \to 0$;

$$\lambda_U(u) \equiv P(U > u | V > u) = \frac{1 - 2u + C(u,u)}{1-u} = 2 - \frac{1 - C(u,u)}{1-u}$$

für $u \to 1$;

$$\lambda_L(u) \equiv P(U < u | V < u) = \frac{C(u,u)}{u} = \text{ für } u \in [0,1].$$

für $u \to 0$.

Asymptotische Tailindizes:

$$\lambda_U \equiv \lim_{u \to 1} \lambda_U(u) \in [0, 1]$$

$$\lambda_L \equiv \lim_{u \to 0} \lambda_L(u) \in [0, 1]$$

$$\overline{\chi}_U \equiv \lim_{u \to 1} \overline{\chi}_U(u) \in [-1, 1]$$

$$\overline{\chi}_L \equiv \lim_{u \to 0} \overline{\chi}_L(u) \in [-1, 1]$$

Ist $C(u, v)$ total differenzierbar, so ergibt sich der obere Tailkoeffizient als

$$\lambda_U = 2 - \lim_{u \to 1} \frac{dC(u, u)}{du}.$$

und der untere als

$$\lambda_L = \lim_{u \to 1} \frac{dC(u, u)}{du}.$$

Charakterisierung nach Ledford & Tawn:
Seien

$$S = -1/\log U \text{ bzw. } T = -1/\log V,$$

dann besitzen S und T besitzen Einheits-Fréchet-Randverteilungen mit

$$P(S > s) = P(T > s) = P(U > e^{-1/s}) = 1 - e^{-1/s} \text{ für } s > 0.$$

Eine im Punkte ∞ langsam variierende Funktion $\mathcal{L}$ hat die Eigenschaft

$$\frac{\mathcal{L}(ct)}{\mathcal{L}(t)} \to 1 \text{ für } t \to \infty$$

für jedes $c > 0$.
Es gilt

$$F_U(t, t) = P(S > t, T > t) =\approx \mathcal{L}(t) P(S > t)^{1/\eta} \text{ für große } t,$$

wobei $\mathcal{L}(t)$ eine in ∞ langsam variierende Funktion mit Grenzwert c für $t \to \infty$ und $\eta \in [0, 1]$ sind.

Analog ist

$$F_L(t, t) = P(S < t, T < t) =\approx \mathcal{L}(t) P(S < t)^{1/\eta} \text{ für große } t,$$

Zusammenhang zwischen λ_U, $\overline{\chi}_U$ und c, η

$$\lambda_U = \begin{cases} c, & \text{falls } \mathcal{L}(t) \to c \text{ und } \overline{\chi}_U = 1 \\ 0, & \text{falls } \overline{\chi}_U < 1 \end{cases}$$

$$\overline{\chi}_U = 2\eta - 1.$$

Übersicht:

	Obere Tailabhängigkeit	Obere Tailunabhängigkeit
λ_U	> 0	$= 0$
$\overline{\chi}_U < 1$	$= 1$	< 1
c	> 0	$= 0$
η	$= 1$	< 1

Analog für die unter Tailabhängigkeit.

Interpretation:

1. Wenn $\eta = 1$ und damit $\overline{\chi}_U = 1$ sind, treten extreme positive Werte von S und T (und damit U und V) mit positiver Wahrscheinlichkeit auf, wenn der Stichprobenumfang gegen ∞ geht.

2. Wenn $1/2 < \eta < 1$ und damit $0 < \overline{\chi} < 1$ sind, können zwar extreme positive Werte von S und T mit gemeinsam mit positiver Wahrscheinlichkeit auftreten; diese Wahrscheinlichkeit geht aber mit zunehmendem Stichprobenumfang gegen 0, wobei die Geschwindigkeit von η und $\mathcal{L}$ abhängt.

3. Für $\eta = 1/2$ ist $\overline{\chi}_U = 0$ und extreme positive Werte von S und T treten approximativ unabhängig voneinander auf.

4. Wenn $0 \leq \eta < 1/2$ und somit $-1 \leq \overline{\chi}_U < 0$ sind, treten extreme positive Werte gemeinsam seltener auf, als es bei Unabhängigkeit der Fall wäre.

Das folgende Beispiel illustriert die Berechnung des Koeffizienten der oberen Tailabhängigkeit im weiteren Sinne.

1. Für die Unabhängigkeitscopula ist

$$\begin{aligned} \overline{F}_U(t,t) &= 1 - 2e^{-1/t} + \left(e^{-1/t}\right)^2 \approx 1 - 2(1-1/t) + (1-1/t)^2 = 2/t - 2 \\ &= 1 \cdot \left(\frac{1}{t}\right)^{1/2}. \end{aligned}$$

   Somit ist $\eta = 1/2$ und $\overline{\chi}_U = 2\eta - 1 = 0$. D.h es ist auch $\lambda_L = 0$.

2. Für die Maximumscopula ist

$$\overline{F}_U(t,t) = 1 - e^{-1/t} \approx 1 - (1 - 1/t) = 1 \cdot 1/t.$$

   D.h. $\eta = 1$ und damit $\overline{\chi}_U = 2\eta - 1 = 1$. Die langsam variierende Funktion $\mathcal{L}(t) = 1$ ist konstant, so daß $\lambda = \lim_{t\to\infty} \mathcal{L}(t) = 1$, so daß maximale obere Tailabhängigkeit vorliegt.

3. Für die FGM-Copula hat Heffernan (2000), S. 284 gezeigt, daß

$$\overline{F}_U(t,t) = 1 - 2e^{-1/t} + e^{-2/t}(1 + \theta(1 - e^{-1/t})^2) \approx \frac{1+\theta}{t^2}$$

für große t gilt. Somit sind $\eta = 1/2$, d.h. $\overline{\chi}_U = 0$und $\lambda_U = 0$.

4. Joe (1997), S. 148 diskutiert die Copula B12

$$C(u,v;\theta) = \min(u,v)^{\theta}(uv)^{(1-\theta)} \text{ für } u,v \in [0,1]$$

und $0 \le \theta \le 1$. Es ist ein geometrisches Mittel der Unabhängigkeits- und der Maximumcopula. Für diese Copula gilt

$$\overline{F}_U(t,t) = 1 - 2e^{-1/t} + e^{-\theta/t}e^{-2(1-\theta)/t} \approx \frac{\theta}{t}.$$

Damit sind $\eta = 1$, $\overline{\chi}_U = 1$ und $\lambda = \theta > 0$ für $\theta > 0$. Für $\theta = 1$ liegt maximale obere Tailabhängigkeit vor.

Tailsymmetrie

Von Tailasymmetrie wird gesprochen, wenn $\lambda_L \neq \lambda_U$ ist.

Radial symmetrische Copulas sind tailsymmetrisch, da

$$\lambda_L(u) = \lambda_U(u) \text{ für } u \in [0,1]$$

und

$$\overline{\chi}_L(u) = \overline{\chi}_U(u) \text{ für } u \in [0,1].$$

Obere Tailindizes von Rüschendorf-Copulas

Für die Rüschendorf-Copula ist

$$\frac{dC(u,u)}{du} = 2u + \theta\frac{dF^1(u,u)}{du},$$

so daß

$$\lambda_U = -\theta \lim_{u\to 1} \frac{dF^1(u,u)}{du}.$$

ist.
D.h. der Tailkoeffizient wird durch θ und F^1 bestimmt.

Weiterhin ist:

$$\begin{aligned} \overline{F}_U(t,t) &= 1 - 2e^{-1/t} + e^{-2/t} + \theta F^1(e^{-1/t}, e^{-1/t}) \\ &\approx 1 - 2(1-1/t) + (1-2/t) + \theta F^1(1-1/t, 1-1/t) \\ &= \theta F^1(1-1/t, 1-1/t) \end{aligned}$$

für große t.

D.h. die Funktion F^1 in der Nähe von 1 bzw. 0 ist verantwortlich für Art und Ausmaß der Tailabhängigkeit.

Entscheidend für die Tailabhängigkeit sind die Ableitungen von $F^1(u,u)$ für u nahe 1 bzw. u nahe 0, d.h. große t, wie die folgende Überlegung zeigt:

Wenn $F^1(u,u)$ zweimal stetig differenzierbar für alle $u \in (0,1)$ ist (falls der Grenzwert existiert)

$$\frac{dF^1(u,u)}{du}|_{u=1} = \lim_{u \to 1^-} \frac{dF^1(u,u)}{du}$$

bzw.

$$\frac{dF^1(u,u)}{du}|_{u=0} = \lim_{u \to 0^+} \frac{dF^1(u,u)}{du}$$

sind, gilt die Taylor-Approximation

$$F^1(u,u) \approx F^1(1,1) + \frac{dF^1(v,v)}{dv}|_{v=1}(u-1) + \frac{1}{2}\frac{d^2F^1(v,v)}{dv^2}|_{v=1}(u-1)^2.$$

Für $u = 1 - 1/t$ und große t ist dann wegen $F^1(1,1) = 0$

$$\overline{F}_U(t,t) \approx \frac{dF^1(v,v)}{dv}|_{v=1}\left(-\frac{1}{t}\right) + \frac{1}{2}\frac{d^2F^1(v,v)}{dv^2}|_{v=1}\left(\frac{1}{t}\right)^{1/(1/2)}.$$

Fallunterscheidung:

1. Wenn $\frac{dF^1(v,v)}{dv}|_{v=1} \neq 0$ ist $\eta = 1$, $\overline{\chi}_U = 1$ und $\lambda_U > 0$ mit

$$\lambda_U = -\theta \frac{dF^1(v,v)}{dv}|_{v=1}.$$

2. Für $\frac{1}{2}\frac{d^2F^1(v,v)}{dv^2}|_{v=1} \neq 0$ ist $\eta = 1/2$, was $\overline{\chi}_U = 0$ und $\lambda_U = 0$ bedeutet.

BEISPIEL:

$$C(u,v) = (1-\theta)uv + \theta \min(u,v) = uv + \theta(\min(u,v) - uv).$$

D.h. $F^1(u,v) = \min(u,v) - uv$, womit

$$\frac{dF^1(v,v)}{dv}|_{v=1} = \frac{dv(1-v)}{dv}|_{v=1} = 1 - 2v|_{v=1} = -1 \neq 0,$$

so daß $\eta = 1$ und damit $\overline{\chi}_U = 1$ sind. Es folgt $\lambda_U = 1$, was maximale asymptotische obere Tailabhängigkeit bedeutet.

Für eine auf $[0,1]$ zweimal stetig differenzierbare Funktion $F^1(u,u)$ kann somit nur $\overline{\chi}_U = 1$ bzw. $\overline{\chi}_U = 0$ bzw. $\overline{\chi}_U = 1$ bzw. $\overline{\chi}_U = 0$ gelten.

Andere Werte können nur auftreten, wenn die Grenzwerte $\lim_{u \to 1^-} \frac{dF^1(u,u)}{du}$ oder $\lim_{u \to 0^+} \frac{dF^1(u,u)}{du}$ nicht existieren.

BEISPIEL: Betrachte

$$C(u,v) = \min(u,v)^{\delta}(uv)^{1-\delta}$$

für $0 < \delta < 1$. Damit ist

$$C(u,u) = u^2 + F^1(u,u)$$

mit

$$F^1(u,u) = u^2(u^{-\delta} - 1).$$

Die Grenzwerte sind

$$\begin{aligned}
\lim_{u\to 1^-} \frac{dF^1(u,u)}{du} &= -\delta =\neq 0,\\
\lim_{u\to 0^+} \frac{dF^1(u,u)}{du} &= 0,\\
\lim_{u\to 1^-} \frac{d^2F^1(u,u)}{du^2} &= \delta(\delta^2-3),\\
\lim_{u\to 0^+} \frac{d^2F^1(u,u)}{du^2} &= \infty.
\end{aligned}$$

Bezügliche der unteren Tailabhängigkeit hat Heffernan (2002)

$$\overline{F}_U(t,t) \approx \frac{1}{t^{2-\delta}}$$

nachgewiesen, so daß $\eta = 1/(2-\delta)$ und $\overline{\chi}_L = \delta/(2-\delta)$ ist.

Spezialfall: PCC-Copula

Betrachtet man den Spezialfall der PCC-Copula von Long et al., so ist

$$F^1(u,u) = \tilde{K}(2(1-u)) - 2K(1)(u-1)^2$$

für $u > 1/2$.

Wegen der Tailsymmetrie braucht für die PCC-Copula nur die obere Tailabhängigkeit untersucht zu werden. Es ist für $u > 1/2$:

$$F^1(u,u) = \tilde{K}(2(1-u)) - 2K(1)(u-1)^2,$$

womit

$$\frac{dF^1(u,u)}{du} = -2K(2(1-u)) - 4K(1)(u-1)$$

und

$$\frac{d^2F^1(u,u)}{du^2} = 4\kappa(2(1-u)) - 4K(1).$$

Damit sind die Grenzwerte

$$\begin{aligned}
\lim_{u\to 1^-} \frac{dF^1(u,u)}{du} &= = 0,\\
\lim_{u\to 1^-} \frac{d^2F^1(u,u)}{du^2} &= -4K(1) \neq 0.
\end{aligned}$$

Damit sind $\overline{\chi}_L = \overline{\chi}_U = 0$, d.h. die PCC-Copula verhält sich unabhängig von der Wahl von κ in den Extrembereichen wie eine Unabhängigkeits-copula.

PRC-Copula

Obwohl sich das Ergebnis der PCC-Copula übertagen läßt, soll für den Spezialfall der PRC-Copula ein direkter Nachweis geführt werden. Für diese ist

$$\begin{aligned} F^1(1-1/t, 1-1/t) &= \tilde{K}(2(1-(1-1/t))) - 2K(1)((1-1/t)-1)^2 \\ &= \tilde{K}(2/t) - 2K(1)1/t^2 \\ &= \frac{1}{(\beta+1)(\beta+2)}\left(-1+(\beta+2)\frac{2}{t}+\left(1-\frac{2}{t}\right)^{\beta+2}\right) \\ &\quad -2K(1)\left(\frac{1}{t}\right)^2 . \end{aligned}$$

Mit der Entwicklung

$$\left(1-\frac{2}{t}\right)^{\beta+2} = \sum_{j=0}^{\infty}(-1)^j\binom{\beta+2}{j}\left(\frac{2}{t}\right)^j$$

für große t, so daß $|2/t| < 1$ ist, ergibt sich

$$F^1(1-1/t, 1-1/t) = \frac{1}{(\beta+1)(\beta+2)}\left(\sum_{j=2}^{\infty}(-1)^j\binom{\beta+2}{j}\left(\frac{2}{t}\right)^j\right) - 2K(1)\left(\frac{1}{t}\right)^2 .$$

für große t. D.h. es treten nur Potenzen von $1/t$ auf, die nicht kleiner als 2 sind, so daß $\eta = 1/2$ und damit $\overline{\chi}_U = 0$ sind.

DCC-Copula

Wiederum liegt radiale Symmetrie vor, so daß nur die obere Tailabhängigkeit untersucht wird. Es gilt:

$$\begin{aligned} F^1\left(e^{-1/t}, e^{-1/t}\right) &= \frac{8}{3}\Big((e^{-1/t})^{3/2}(1-e^{-1/t}) \\ &\quad + e^{-1/t}(1-e^{-1/t})^{3/2} - e^{-1/t} + e^{-2/t}\Big) \\ &\approx \frac{8}{3}\left(\left(1-\frac{3/2}{t}\right)\frac{1}{t} + \left(1-\frac{1}{t}\right)\left(\frac{1}{t}\right)^{3/2}\right. \\ &\quad \left. - \left(1-\frac{1}{t}\right) + \left(1-\frac{2}{t}\right)\right) \\ &= \frac{8}{3}\left(\left(\frac{1}{t}\right)^{3/2} - \frac{3/2}{t^2} - \left(\frac{1}{t}\right)^{5/2}\right). \end{aligned}$$

Damit sind $\eta = 2/3$ und $\overline{\chi}_U = 1/3$. D.h. DCC-Copula verfügt zwar über obere Tailunabhängigkeit; der asymptotische Zusammenhang ist aber etwas stärker als bei der Unabhängigkeitscopula.
Alternativ können auch die ersten beiden Ableitungen von

$$F^1(u,u) = \frac{8}{3}\left(u^{3/2}(1-u) + u(1-u)^{3/2} - u + u^2\right)$$

betrachtet werden. Diese lauten

$$\frac{dF^1(u,u)}{du} = \frac{8}{3}\left(\frac{3}{2}u^{1/2}(1-u) - u^{3/2} + (1-u)^{3/2} - \frac{3}{2}u(1-u)^{1/2} - 1 + 2u\right)$$

und

$$\begin{aligned} \frac{d^2F^1(u,u)}{du^2} &= \frac{8}{3}\left(\frac{3}{4}u^{-1/2}(1-u) - \frac{3}{2}u^{1/2} - \frac{3}{2}u^{1/2}\right. \\ &\quad \left. -\frac{3}{2}(1-u)^{1/2} - \frac{3}{2}(1-u)^{1/2} + \frac{3}{4}u(1-u)^{-1/2} + 2\right). \end{aligned}$$

Während die erste Ableitung mit $u \to 1^-$ gegen 0 konvergiert, existiert der Grenzwert der zweiten Ableitungen nicht, da $(1-u)^{-1/2}$ über alle Grenzen wächst. Dies zeigt einen Wert $\eta \neq 1/2$ und $\eta \neq 1$ an.

Tailindizes von Produkt-Copulas

Für die Produktcopula gilt

$$F^1(u,u) = \phi(u)\psi(u).$$

Es müssen $|\phi'(u)| \leq 1$ und $|\psi'(u)| \leq 1$ sein, so daß

$$\frac{dF^1(u,u)}{du} = \phi'(u)\psi(u) + \phi(u)\psi'(u)$$

ist.
Wenn $\phi(1) = \psi(1) = 0$ folgt stets die obere Tailunabhängigkeit, so daß $\overline{\chi}_U < 1$ ist.

Existieren weiterhin $\phi''(1)$, $\psi''(1)$, so sind wegen $\phi(0) = \phi(1) = \psi(0) = \phi(0) = 0$

$$\begin{aligned} \lim_{u\to 1^-} \frac{dF^1(u,u)}{du} &= \phi'(1)\psi(1) + \phi(1)\psi'(1) = 0, \\ \lim_{u\to 1^-} \frac{d^2F^1(u,u)}{du^2} &= \phi''(1)\psi(1) + 2\phi'(1)\psi'(1) + \phi(1)\psi''(1) = 2\phi'(1)\psi'(1). \end{aligned}$$

Fallunterscheidung:

1. Wenn $\phi'(1) \neq 0$ und $\psi'(0) \neq 0$ sind, ist $\overline{\chi}_U = 0$. Die Produktcopula verhält sich für große Werte wie die Unabhängigkeitscopula.

2. Wenn $\phi'(1) = 0$ oder $\psi'(0) = 0$ bzw. wenn die zweite Ableitung von ϕ oder ψ an der Stelle 1 nicht existiert, ist $0 < \overline{\chi}_U < 1$.

BEISPIEL:

1. Für eine Potenzcopula gilt für $k > 0$

$$\phi(u) = \frac{1}{k+1}u(u^k - 1),$$

so daß $\phi(1) = \phi(0) = 0$ ist, woraus $\lambda_U = \lambda_L = 0$ folgt.

Weiterhin ist
$$\phi'(u) = \frac{1}{k(k+1)}(u^{k-1} - 1)$$
mit $\phi'(0) = -1/(k(k+1)) = -1$, so daß $\overline{\chi}_U = 0$ folgt.

Wegen $\phi'(1) = 0$ und

$$\phi''(1) = \frac{1}{(k-1)k(k+1)} \neq 0$$

ist aber $\overline{\chi}_L = 1$.

2. Die Fischer-Copula für die Cauchy-Verteilung führt zu

$$\phi'(u) = -\sin(2\pi u)$$

mit $\phi'(1) = 0$. Nun ist aber jede Ableitung von ϕ an der Stelle 1 gleich 0.

3. Die Fischer-Copula für die Extremwertverteilung führt zu

$$\phi(u) = -u \ln u$$

mit $\phi(1) = 0$ und $\phi(0) = 0$. D.h. obere und untere Tailunabhängigkeit.

Wegen

$$\phi'(1) = -1 \text{ und } \phi'(0) = -\infty$$

gilt $\overline{\chi}_U = 1$