

# *gh*-transformierte symmetrische Verteilungen

Ingo Klein  
Lehrstuhl für Statistik und Ökonometrie  
Universität Erlangen–Nürnberg  
Lange Gasse 20  
D–90403 Nürnberg  
Germany  
E-mail: ingo.klein@wiso.uni-erlangen.de

## Abstract

Tukey (1960) derived via the technique of transformation of variables starting from the normal distribution a family of skewed and leptokurtic distributions. Skewness and leptokurtosis are determined by two parameters  $g$  and  $h$ . Therefore, the family was called family  $gh$ -distributions. We modify Tukey's proposal such that other symmetric distributions than the normal distribution will be taken as starting point for the transformation of variables. We speak about a family "  $gh$ -transformed symmetrical distributions." Especially, we consider the Laplace distribution and the  $t$ -distribution with a fixed number of degrees. The aim is to show, what kind of substitution take place between a leptokurtic symmetric distribution and the parameter  $g$  and  $h$ . Because of numerical problems with maximum likelihood, Hoaglin's (1983) technique of estimation by quantiles is used. We demonstrate how the three families of  $gh$ -transformed symmetrical distributions work for real financial data sets that stem from a skewed and leptokurtic distribution.

# 1 Einleitung

Sei  $Z$  eine standardnormalverteilte Zufallsvariable, dann kann mittels der Variablentransformation

$$X = A + B \frac{e^{gZ} - 1}{g} e^{h/2Z^2}$$

eine Zufallsvariable  $X$  erzeugt werden, deren Verteilung schief ist und ein anderes Wölbungsverhalten besitzt als die Normalverteilungsfamilie. Die Schiefe wird durch den Parameter  $g$  und das Wölbungsverhalten durch den Parameter  $h$  gesteuert. Tukey (1977) nennt deshalb die zugehörige vierparametrische Verteilungsfamilie Familie der  $g$ -und- $h$ -Verteilungen (im folgenden kurz  $gh$ -Verteilungen genannt). Die Spezialfälle der  $g$ - bzw.  $h$ -Verteilungen ergeben sich für  $h = 0$  bzw.  $g = 0$ . Bei den  $g$ -Verteilungen handelt es sich im wesentlichen um logarithmische Normalverteilungen, die somit über eine "neutrale" Wölbung verfügen. Für  $g = 0$  und  $h = 0$  erhält man die Familie der Normalverteilungen, die als Referenzpunkt in den  $g$ -und- $h$ -Verteilungen enthalten.

Die Eigenschaften der Familie der  $gh$ -Verteilungen wurden insbesondere von Hoaglin (1983), Martinez & Iglewicz (1984) und MacGillivray (1988) untersucht. Hoaglin schätzt die Parameter  $A$ ,  $B$ ,  $g$  und  $h$  ausreißerresistent mittels Quantilen, Martinez & Iglewicz leiten Quantile und Momente der  $g$ -und- $h$ -Verteilungen her und MacGillivray diskutiert, inwieweit die Parameter  $g$  und  $h$  Schiefe- bzw. Wölbungsparameter sind. Dazu wird untersucht, welche der bekannten Schiefe- und Wölbungsordnungen von der Familie der  $g$ -und- $h$ -Verteilungen eingehalten werden. Dabei ist die Erkenntnis wichtig, daß die Wölbungseigenschaften auch von  $g$  mitbeeinflusst werden. Dies wird auch daran ersichtlich, daß im Verfahren von Hoaglin zunächst  $g$  unabhängig von  $h$  geschätzt und danach  $h$  in Abhängigkeit von  $g$  ermittelt wird.

Erweiterungen der  $gh$ -Verteilungen sind von MacGillivray & Cannon (1997) vorgeschlagen worden. Diese Verallgemeinerungen versuchen eine bessere Trennung der Parametrisierung von Schiefe und Wölbung zu erreichen (verallgemeinerte  $gh$ -Verteilungen) bzw. das Problem des eingeschränkten Trägers insbesondere der  $h$ -Verteilungen zu lösen. Die Zufallsvariable  $X$  besitzt für  $h < 0$  ein endliches Intervall als Träger und einen  $U$ -förmigen Verlauf.

Es gibt mittlerweile einige Anwendungen der  $g$ -und- $h$ -Verteilungen auf empirische Datensätze. Für die vorliegende Arbeit sind insbesondere die Anwendungen auf Finanzmarktdaten (insbesondere Renditen) interessant. Diese bieten sich an, da diese Daten bekanntermaßen über eine ausgeprägte Leptokurtosis und gelegentlich auch über Schiefe verfügen. So haben Badrinath & Chatterjee bereits 1988 die  $g$ -und- $h$ -Verteilungen auf die Renditen von Marktindizes und 1992 auf einzelne US-amerikanische Aktienwerte angewendet. In der letztgenannten Arbeit haben sie das Querschnitts- und Zeitreihenverhalten der quantilsbasierten Schätzungen von  $g$  und  $h$  untersucht.

In folgenden sollen die  $gh$ -Verteilungen dadurch erweitert werden, daß als Verteilung von  $Z$  beliebige symmetrische Verteilungen zugelassen werden. Wir sprechen von Familien  $gh$ -transformierter Verteilungen. Die  $gh$ -transformierte Standardnormalverteilung soll weiterhin kurz  $gh$ -Verteilung genannt werden. Durch die Verwendung anderer symmetrischer Ausgangsverteilungen verliert man zwar die wichtigen Referenzeigenschaften

der Normalverteilung insbesondere für die Definition einer neutralen (mesokurtischen) Wölbung. Weiß man jedoch, daß stark leptokurtisch verteilte Daten vorliegen, so kann man bereits als Ausgangsverteilung eine leptokurtische Verteilung, wie z.B. die Laplace-Verteilung oder die  $t$ -Verteilung mit 3, 5 oder 7 Freiheitsgraden, betrachten, so daß insbesondere der Wölbungsparameter  $h$  nur noch einen restlichen Anpassungsbedarf befriedigen muß. Es stellt sich die Frage, welche der beiden Anpassungsstrategien die bessere ist: Betrachtung einer standardnormalverteilten Zufallsvariablen  $Z$  und alleinige Modellierung der Leptokurtosis durch den Parameter  $h$  oder Verwendung einer leptokurtischen Ausgangsverteilung für  $Z$  und Modellierung der fehlenden Kurtosis durch  $h$ . Diese Frage soll an realen Datensätzen überprüft werden. Es handelt sich um die stetigen Renditen von Finanzmarktindizes (DAX30, Nikkei, Dow Jones), von ausgewählten typischen Vertretern des DAX30 (wie z.B. Bayer, Commerzbank, SAP und VW) und von ausgewählten typischen Vertretern des Index des neuen Marktes NEMAX50 (z.B. Mobilcom und Consors). Diese ist für Anpassungsvergleiche besonders interessant, da die empirische Renditeverteilung noch kein solch stereotypes Bild aufweist wie die entsprechenden Verteilungen der DAX-Werte. Eine zentrale Rolle kommt den wöchentlichen stetigen Renditen des Nikkei-Index zu, da diese in einer umfangreichen Studie von Mittnik et al. (1997) für eine Vielzahl von Verteilungsmodellen untersucht worden sind. Ihre Ergebnisse können zum Vergleich der Anpassungsgüte von  $gh$ -transformierten symmetrischen Verteilungen herangezogen werden.

## 2 $g$ -transformierte symmetrische Verteilungen

### 2.1 Parametrische Schiefefamilien

Van Zwet (1964) hat auf der Menge der Verteilungsfunktionen  $\mathcal{F}$  eine partielle Schiefeordnung  $\preceq_2$  mittels

$$F \preceq_2 G : \iff G^{-1}(F(x)) \text{ ist konvex}$$

für  $F, G \in \mathcal{F}$  eingeführt.  $F$  heißt nicht rechtsschiefer als  $G$ . Oja (1981) führt eine Schiefe-Skalenfamilie  $\mathcal{SK}$  als

$$\mathcal{SK} := \{F, G \in \mathcal{F} | F \prec_2 G \text{ oder } G \preceq_2 F\}$$

ein. D.h. die Elemente dieser Familie müssen bezüglich der partiellen Ordnung  $\preceq_2$  vergleichbar sein. Eine parametrische Schiefe-Skalenfamilie ist durch

$$\{F \circ g^{-1} | g \in \mathcal{C}\}$$

für  $F \in \mathcal{F}$  gegeben, wobei mit  $\mathcal{C}$  eine abgeschlossene Menge auf  $\mathbb{R}$  streng monoton zunehmend, konvexer oder streng monoton zunehmend, konkaver Funktionen bezeichnet wird. Die funktionale Verknüpfung  $F \circ g^{-1}$  ist Ergebnis einer Variablentransformation. Es stellt sich die Frage, wie  $\mathcal{C}$  geeignet festgelegt werden kann.

## 2.2 G-Transformationen

Sei  $Z$  symmetrisch verteilt mit der Verteilungsfunktion  $F$  und

$$X = A + BG(Z) = A + BG^*(Z)Z,$$

dann sind plausible Forderungen an  $G$ :

1.  $G$  sei eine hinreichend glatte Funktion. Insbesondere soll  $G$  zweimal differenzierbar sein.
2. Im Zentrum der Ausgangsverteilung  $F$  soll keine Transformation erfolgen, d.h.  $G(0) = 0$  und  $G(z) \approx z$  für  $z \approx 0$ .
3.  $G$  muß streng monoton zunehmend konvex ( $G'(z) > 0$  und  $G''(z) > 0$ ) oder streng monoton zunehmend konkav sein: ( $G'(z) > 0$  und  $G''(z) < 0$ ) sein.

Wenn  $G$  konvex ist, dann ist wegen  $G'(0) = 1$  auch  $G'(z) > 1$  für  $z > 0$  und  $0 < G'(z) < 1$  für  $z < 0$ , so daß die linken Tails von  $F$  verkürzt und die rechten Tails verlängert werden (Verstärkung der Rechtsschiefe). Ist  $G$  streng konkav, dann ist wegen  $G'(0) = 1$  nun  $0 < G'(z) < 1$  für  $z > 0$  und  $G'(z) > 1$  für  $z < 0$ , so daß die rechten Tails verkürzt und die linken Tails verlängert werden (Verstärkung der Linksschiefe). Es stellt sich nun die Frage, ob man parametrische Familien von Transformationen  $\mathcal{C}$  angeben kann, deren Elemente die vorstehenden Bedingungen erfüllen und deren Parameter als Schiefeparameter interpretiert werden kann.

## 2.3 g-Transformation

### 2.3.1 Definition und Eigenschaften

Hoaglin (1983) betrachtet - sich auf Tukey (1960) berufend - die Transformation  $G_g(Z)$  mit

$$G_g(z) = (e^{gz} - 1)/g \text{ für } g \in \mathbb{R}.$$

Es ist  $G_g(z) > -1/g$  falls  $g > 0$  und  $G_g(z) < -1/g$  falls  $g < 0$ . ist. Somit ist der Wertebereich von  $X = A + B((e^{gz} - 1)/g)$  einseitig. Dies ist zumindest für rechtssteile Renditeverteilungen eine wünschenswerte Eigenschaft, da Kursverluste von mehr als 100 Prozent unmöglich sind.

Für  $g \rightarrow 0$  ist  $G_g(z) \rightarrow 1$  und  $X$  somit entsprechend  $Z$  symmetrisch verteilt. Weiterhin ist diese Transformation wegen

$$G'_g(z) = e^{gz} > 0 \text{ für } z \in \mathbb{R}$$

streng monoton zunehmend für alle  $g \in \mathbb{R}$ . Wegen der strengen Monotonie ist  $G_g$  umkehrbar eindeutig und die Umkehrfunktion lautet

$$G_g^{-1}(y) = 1/g \ln(1 + gy) \text{ für } y > -1/g.$$

Die zweite Ableitung

$$G''_g(z) = ge^{gz}$$

besitzt für alle  $z \in \mathbb{R}$  das Vorzeichen von  $g$ , so daß die Transformation für  $g < 0$  streng konkav bzw. für  $g > 0$  streng konvex auf  $\mathbb{R}$  ist. Somit ist

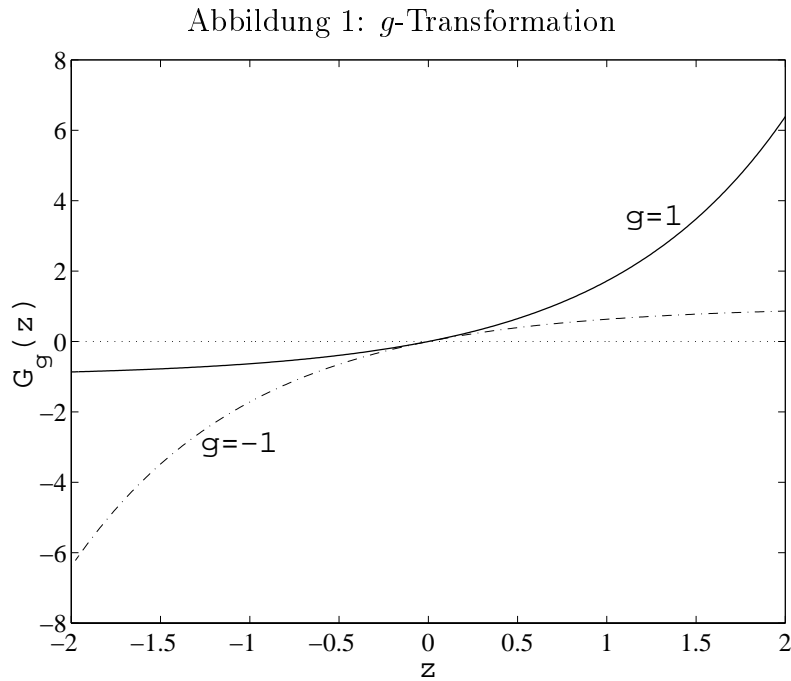
$$\mathcal{G}_g = \{F \circ G_g^{-1} | g \in \mathbb{R}\}$$

eine parametrische Schiefefamilie im Sinne von Oja (1981). MacGillivray (1992) hat nachgewiesen, daß  $g$  in dem folgenden Sinne ein Schiefeparameter ist:

$$g_1 < g_2 \iff G_{g_1}(Z) \preceq_2 G_{g_2}(Z).$$

D.h. größere Werte von  $g$  führen zu einer rechtsschieferen Verteilung, wenn  $Z$  entsprechend der Verteilungsfunktion  $F$  symmetrisch verteilt ist. Der Nachweis von MacGillivray (1992) bezieht sich zwar nur auf die Normalverteilung als Ausgangsverteilung. Der Beweis ist aber problemlos auf beliebige symmetrische Ausgangsverteilungen erweiterbar.

Die Abbildung 1 vermittelt einen Eindruck der  $g$ -Transformationen für  $g = -1$  und  $g = 1$ .



### 2.3.2 Quantile

Da  $G_g$  streng monoton zunehmend ist, lassen sich die  $p$ -Quantile  $x_p$  der Verteilung von  $X = A + BG_g(Z)$  via

$$x_p = A + B \frac{e^{gz_p} - 1}{g}$$

unmittelbar aus den  $p$ -Quantilen  $z_p$  von  $Z$  errechnen, wobei  $Z$  die zu  $F$  gehörige Zufallsvariable ist.

### 2.3.3 Variablentransformation

Mit der Technik der Variablentransformation läßt sich die Verteilungsfunktion von  $X$  wie folgt durch die Verteilungsfunktion von  $Z$  berechnen:

$$F_X(x; A, B, g) := P(X \leq x) = P(Z \leq G_g^{-1}((x - A)/B)) = F_Z(G_g^{-1}((x - A)/B))$$

für  $(x - A)/B > -1/g$ . Durch Differentiation erhält man eine entsprechende Beziehung zwischen den Dichten von  $X$  und  $Z$ :

$$f_X(x; A, B, g) = \frac{1}{B} f_Z(\ln(1 + g((x - A)/B)/g)) \frac{1}{1 + g((x - A)/B)}$$

für  $x > A - 1/gB$ .

## 2.4 Spezialfälle

Setzt man für  $Z$  eine standardnormalverteilte Zufallsvariable ein, so ergibt sich die  $g$ -Verteilung, die im wesentlichen einer logarithmischen Normalverteilung entspricht. Prinzipiell lassen sich auch andere symmetrische Verteilungen für  $Z$  spezifizieren. Im folgenden sollen zusätzlich zur Standardnormalverteilung die Laplace- und die  $t$ -Verteilung betrachtet werden. Die symmetrische Ausgangsverteilung wird jeweils so standardisiert, daß der Median gleich 0 und die Standardabweichung gleich 1 ist, falls sie existiert. Wir sprechen im einzelnen von der  $g$ -transformierten Normalverteilung (kurz:  $g$ -Verteilung), der  $g$ -transformierten Laplace-Verteilung und der  $g$ -transformierten  $t$ -Verteilung.

Wir betrachten in Anlehnung an Tukey und Hoaglin zunächst die  $g$ -transformierte Normalverteilung oder kurz  $g$ -Verteilung.

**Beispiel 2.1** *Setzt man für  $f_Z$  die Dichte der Standardnormalverteilung ein, so ist*

$$f_X(x; A, B, g) = \frac{1}{B\sqrt{2\pi}} \exp\left(-1/(2g^2) (\ln(1 - g((x - A)/B)))^2\right) \frac{1}{1 + g((x - A)/B)}$$

für  $x > A - 1/gB$ . *Es handelt sich um eine verallgemeinerte logarithmische Normalverteilung, da der Logarithmus von  $Y$  einer Normalverteilung folgt.*

Nun lassen sich auch andere symmetrische Dichten als Ausgangspunkt wählen. Von besonderem Interesse für die Modellierung von Finanzmarktdaten (speziell Renditen) sind leptokurtische Verteilungen. Wir betrachten als Beispiele die Laplace-Verteilung und die  $t$ -Verteilung.

**Beispiel 2.2** *Sei  $U$  verteilt entsprechend*

$$f_U(u) = 1/2 \exp(-|u|) \quad \text{für } u \in \mathbb{R},$$

*dann besitzt  $U$  die Laplace-Verteilung. Für deren Varianz erhält man  $\text{Var}(U) = 2$ , so daß*

$$f_Z(z) = 1/\sqrt{2} \exp\left(-\sqrt{2}|z|\right)$$

für  $z \in \mathbb{R}$  die Dichtefunktion der standardisierten Laplace-Verteilung (d.h.  $\text{Var}(Z) = 1$ ) angibt. Dann besitzt  $X = A + Bg(Z) = A + B(e^{gZ} - 1)/g$  die Dichte

$$f_X(x) = \frac{1}{B\sqrt{2}} \exp\left(-\sqrt{2}|1/g \ln(1 - g((x - A)/B))|\right) \frac{1}{1 + g((x - A)/B)}$$

für  $x > A - 1/gB$ .

**Beispiel 2.3** Sei  $U$   $t$ -verteilt mit  $\nu$  Freiheitsgraden, dann lautet die Dichte von  $U$

$$f_U(u; \nu) = \frac{\Gamma((k+1)/2)}{\Gamma(k/2)} \frac{1}{\sqrt{\nu\pi}} (1 + u^2/\nu)^{-(\nu+1)/2}.$$

Für  $\nu > 2$  existiert die Varianz von  $U$  und lautet  $\nu/(\nu-2)$ . Dann besitzt  $Z = \sqrt{\nu-2}U/\sqrt{\nu}$  eine standardisierte  $t$ -Verteilung. Für diese lautet die Dichte von  $X = A + B(e^{gZ} - 1)/g$ :

$$\begin{aligned} f_X(x; A, B, g, \nu) &= \frac{\Gamma((\nu+1)/2)}{\Gamma(\nu/2)} \frac{1}{B\sqrt{\nu\pi}} \left(1 + \ln(1 + g(x - A)/B)^2/(g^2\nu)\right)^{-(\nu+1)/2} \\ &= \frac{1}{1 + g((x - A)/B)} \end{aligned}$$

für  $x > A - 1/gB$ .

## 2.5 Momente $g$ -transformierter symmetrischer Verteilungen

Ausgangspunkt für die Berechnung der Potenzmomente von  $Y = (\exp(gZ) - 1)/g$  ist die folgende Entwicklung:

$$Y^k = \frac{1}{g^k} \sum_{i=0}^k \binom{k}{i} (-1)^{k-i} e^{igZ}.$$

Damit das  $k$ -te Potenzmoment existiert, muß offenbar  $E(igZ)$  existieren für  $i = 1, 2, \dots, k$ . Hinreichend dafür ist, daß die momenterzeugende Funktion  $m_Z(t)$  für  $t \in [-kg, kg]$  existiert, wenn  $g > 0$  ist bzw. für  $t \in [kg, -kg]$ , wenn  $g < 0$  ist.

Die ersten vier Potenzmomente lauten in Abhängigkeit der momenterzeugenden Funktion  $m_Z$ :

$$\begin{aligned} E(Y) &= (-1 + m_Z(g)) / g, \\ E(Y^2) &= (1 - 2m_Z(g) + m_Z(2g)) / g^2, \\ E(Y^3) &= (-1 + 3m_Z(g) - 3m_Z(2g) + m_Z(3g)) / g^3, \\ E(Y^4) &= (1 - 4m_Z(g) + 6m_Z(2g) - 4m_Z(3g) + m_Z(4g)) / g^4. \end{aligned}$$

Für das  $k$ -te zentrierte Moment gilt (Existenz vorausgesetzt)

$$E((Y - E(Y))^k) = \frac{1}{g^k} \sum_{i=1}^k \binom{k}{i} ((-1 + m_Z(g))/g)^{k-i} \sum_{j=0}^i \binom{i}{j} (-1)^{k-j} m_Z(jg)$$

für  $k = 1, 2, \dots$ . Daraus errechnet sich die Varianz

$$\text{Var}(Y) = (m_Z(2g) - m_Z(g)^2) / g^2.$$

**Beispiel 2.4** Die momenterzeugende Funktion für eine standardnormalverteilte Zufallsvariable  $Z$  existiert und lautet  $m_Z(t) = \exp(1/2t^2)$  für  $t \in \mathbb{R}$ . Somit existieren sämtliche Potenzmomente von  $Y = (\exp(gZ) - 1)/g$ . Sie sind durch Einsetzen zu errechnen und in Hoaglin (1983), S. 502 angegeben.

**Beispiel 2.5** Komplizierter wird es, wenn als Ausgangspunkt für die Generierung schiefer Verteilungen die standardisierte Laplace-Verteilung gewählt wird. Deren momenterzeugende Funktion lautet

$$m_Z(t) = (2 - t^2)^{-1}$$

für  $|t| < \sqrt{2}$  und existiert somit nicht für alle reellen  $t$ . Dies bedeutet, daß die Momente von  $Y$  bis zur Ordnung  $k$  mit  $k < \sqrt{2}/|g|$  existieren. Durch Einsetzen der momenterzeugenden Funktion ergeben sich die Momente. Es handelt sich aber im Regelfall um algebraisch unhandliche Ausdrücke, so daß mit

$$E(Y) = (-1 + m_Z(g)) / g = g - 1/g$$

lediglich der Erwartungswert explizit angegeben werden soll.

**Beispiel 2.6** Im Falle der  $t$ -Verteilung existiert die momenterzeugende Funktion für alle  $t \neq 0$  nicht. Somit existieren auch sämtliche Momente von  $Y$  nicht.

## 2.6 Bestimmung von $A$ , $B$ und $g$

Hoaglin (1983), S. 468f. und S. 477 gibt ein exploratives Verfahren zur Bestimmung der Parameter  $A$ ,  $B$  und  $g$  an. Da dieses Verfahren nur auf Quantile zurückgreift, kann es unabhängig von der Ausgangsverteilung für jede  $g$ -transformierte Verteilung angewendet werden.

Mit  $(x_1, \dots, x_n)$  liege ein Datenvektor der Länge  $n$  vor.  $x_{(p)}$  benennt das  $p$ -te Quantil der empirischen Verteilung dieser Daten. Dann wird für  $p < 0.5$

$$g_p = -\frac{1}{z_p} \ln \frac{x_{(1-p)} - x_{(0.5)}}{x_{(0.5)} - x_{(p)}}$$

betrachtet, wobei  $z_p$  das  $p$ -te Quantil der Ausgangsverteilung ist.  $g_p$  wird für eine Auswahl von Wahrscheinlichkeiten  $p$  berechnet. Bei den im letzten Abschnitt erfolgenden Berechnungen werden die Werte

$$1/4, 1/8, 1/16, 1/32, 1/64, 1/128, 1/256, 1/512, 1/1024$$

(sog. Letter-Values) betrachtet, da hinreichend viele Daten vorliegen und mit dieser Auswahl insbesondere die Ränder der Verteilung berücksichtigt werden können.  $g$  wird bei hinreichend stabilem Verlauf von  $g_p$  als deren Median geschätzt. Ist eine funktionale Beziehung zwischen  $g_p$  und  $z_p$  feststellbar, so kann diese inkorporiert werden. Die Parameter der Beziehung sind z.B. mittels der Methode der kleinsten Quadrate zu schätzen.

$A$  ist wegen  $z_{0.5} = 0$  durch

$$x_{(0.5)} = A + Bz_{0.5} = A$$



als Median der Daten gegeben.

Zwischen der sog. Midrange  $1/2(x_{(p)} + x_{(1-p)})$  und  $z_p$  weist Hoaglin (1985), S. 477 die folgende approximative Beziehung nach

$$1/2(x_p + x_{1-p}) \approx A + Bgz_p^2/2,$$

so daß  $B$  mittels einer homogenen Regression von  $1/2(x_p + x_{1-p}) - x_{0.5}$  auf  $gz_p^2/2$  bestimmt werden kann. Hoaglin verwendet zur Anpassung der Regressionsgeraden die Methode "Fitting straight lines by eye" (siehe auch Mosteller et al. (1985), S. 225ff.). Da im letzten Abschnitt eine Reihe von Finanzmarktdaten automatisiert diskutiert werden sollen, wird hier  $B$  nach der Methode der kleinsten Quadrate bestimmt.

Als alternatives Schätzverfahren liegt für die  $gh$ -transformierte Standardnormalverteilung die ML-Schätzung nahe. Diese ist aber numerisch deutlich aufwendiger und soll deshalb für beliebige  $gh$ -transformierte symmetrische Verteilungen nicht betrachtet werden soll.

## 3 Generierung lepto- und platykurtischer Verteilungen

### 3.1 Parametrische Wölbungs-Skalenfamilien

Van Zwet (1964) hat eine partielle Wölbungsordnung  $\preceq_S$  auf der Menge der symmetrischen Verteilungsfunktionen  $\mathcal{F}^s$  eingeführt. Seien  $F, G \in \mathcal{F}^s$  und  $\mu_F$  die Symmetriestelle von  $F$ , dann ist  $\preceq_S$  durch

$$F \preceq_S G : \iff G^{-1}(F(x)) \text{ für } x > \mu_F$$

definiert und  $G$  heißt stärker gewölbt als  $F$ . Wegen der Symmetrie ist dann  $G^{-1}(F(x))$  eine monoton zunehmende, antisymmetrische und konkav-konvexe Funktion mit einem Wendepunkt an der Stelle  $\mu_F$ .

$\preceq_S$  kann auch äquivalent als partielle Schiefeordnung auf der Menge der Intervallverteilungsfunktionen eingeführt werden. Ausgehend von einer symmetrisch verteilten Zufallsvariablen  $Z$  mit Verteilungsfunktion  $F$  und Median  $\mu_F$  läßt sich die sog. Intervallverteilungsfunktion

$$F^*(x) := F(x + \mu_F) - F(x - \mu_F) = 2F(x + \mu_F) - 1$$

für  $x > 0$  betrachten. Für  $F, G \in \mathcal{F}^s$  gilt

$$F \preceq_S G : \iff F^* \preceq_2 G^*.$$

Oja (1981) definiert dann eine Wölbungs-Skalenfamilie  $\mathcal{W}$  als eine Schiefe-Skalenfamilie für Intervallverteilungsfunktionen

$$\mathcal{W} = \{F, G \in \mathcal{F} | F^* \preceq_2 G^* \text{ oder; } G^* \preceq_2 F^*\}.$$

Sei  $\mathcal{C}^*$  eine abgeschlossene Menge auf  $\mathbb{R}_+$  definierter und dort streng zunehmender, konvexer oder streng monoton zunehmend konkaver Funktionen. Es liegt eine parametrische Wölbungsfamilie vor, wenn

$$\mathcal{W} = \{G | G^* = F^* \circ h_+^{-1}, h_+^{-1} \in \mathcal{C}^+\}$$

für  $F^*$  Intervallverteilungsfunktion von  $F \in \mathcal{F}^s$  ist. Ist  $\mu_F = 0$ , dann kann mittels

$$h(x) = \begin{cases} h_+(x) & \text{für } x > 0 \\ -h_+(-x) & \text{für } x < 0 \end{cases}$$

jedes  $h_+$  zu einer streng monoton zunehmenden, konkav-konvexen oder konvex-konkaven Funktion erweitert werden. Sei  $\mathcal{C}$  diese Menge, so kann die zugehörige parametrische Wölbungsfamilie auch mittels

$$\mathcal{W} = \{G | G = F \circ h^{-1}, h^{-1} \in \mathcal{C}\}$$

formuliert werden. Es stellt sich wiederum die Frage, wie  $\mathcal{C}$  geeignet zu wählen ist.

## 3.2 H-Transformation

Hoaglin (1983) formuliert einige plausible Anforderungen an geeignete Wölbungstransformationen  $H$ . Sei  $Z$  symmetrisch verteilt und

$$X = A + BH(Z).$$

Ausgangspunkt ist die Überlegung, daß eine geeignete Transformation  $H$  symmetrieeerhaltend sein soll, d.h.

$$H(z) = -H(-z) \text{ für } z \in \mathbb{R}$$

ist, so daß  $H$  nur auf dem positiven Ast betrachtet werden muß. Für  $z \approx 0$  soll  $H(z) \approx z$  sein, da wie erwähnt die Verteilung im Zentrum nur wenig durch die Transformation berührt werden soll. Dies bedeutet aber, daß  $H'(0) = 1$  sein sollte. Um die Ränder der Verteilung von  $Z$  zu verlängern, muß  $H$  beschleunigt streng monoton zunehmend für  $z > 0$  sein. D.h.  $H'(z) > 0$  und  $H''(z) > 0$  für  $z > 0$ , womit  $H$  streng monoton zunehmend konvex für  $z > 0$  ist. Da aber  $H'(0) = 1$  ist, muß dann  $H'(z) > 1$  für  $z > 0$  sein. Eine Verkürzung der Ränder findet statt, wenn  $H$  streng monoton zunehmend ist mit negativer zweiter Ableitung (d.h.  $0 < H'(z) < 1$  für  $z > 0$  und somit streng monoton zunehmend konkav für  $z > 0$ ) bzw.  $H(z)$  nicht monoton, aber konkav für  $z > 0$  ist.

## 3.3 h-Transformation

### 3.3.1 Definition und Eigenschaften

Tukeys (1960) Vorschlag für eine geeignete Wölbungstransformation lautet

$$H_h(z) = ze^{hz^2/2}$$

für  $z \in \mathbb{R}$  zu wählen. Für  $h = 0$  ergibt sich die Ausgangsverteilung.  $H_h$  erfüllt die Anforderungen für eine Wölbungsfamilie nach Oja (1981) und die erweiterten Anforderungen von Hoaglin (1983).

Sie besitzt für positive und negative Werte von  $h$  gänzlich unterschiedliche Eigenschaften, wie sich anhand der ersten beiden Ableitungen ersehen läßt. Die erste Ableitungen lautet

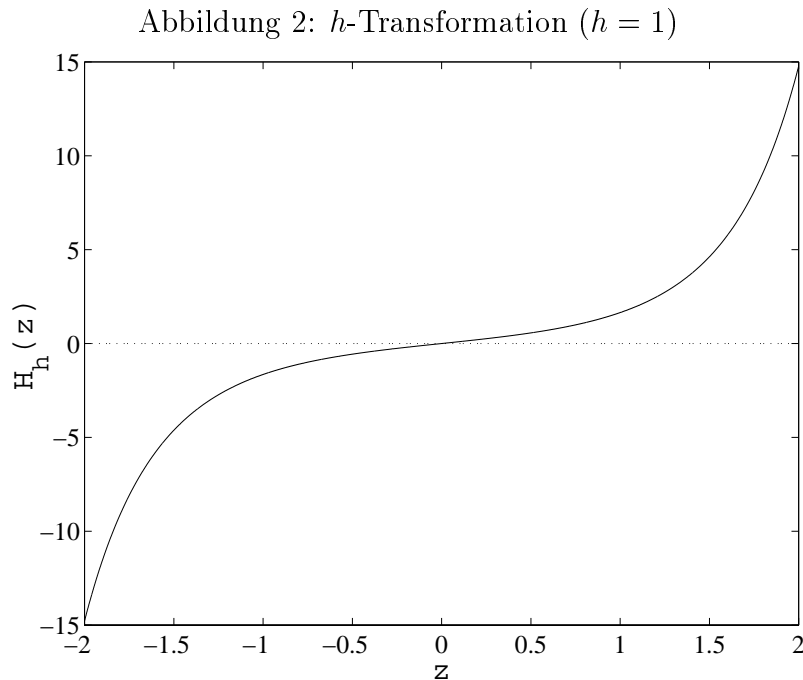
$$H'_h(z) = e^{hz^2/2} (1 + hz^2).$$

und für die zweite Ableitung gilt

$$H''_h(z) = hze^{hz^2} (3 + hz^2).$$

Sei zunächst  $h > 0$ . Dann sind  $H'_h(z) \geq 1$  und  $H''_h(z) > 0$  für  $z > 0$ . Damit ist  $H_h$  streng monoton zunehmend konvex für  $z > 0$  und verlängert die Ränder der Verteilung von  $Z$ .

Die Abbildung 2 vermittelt einen Eindruck der  $h$ -Transformation für  $h = 1$ :



Wenn  $h < 0$  ist, folgt

$$H'_h(z) = e^{h/2z^2} (1 + hz^2) = \begin{cases} > 0 & \text{für } -\sqrt{-1/h} < z < \sqrt{-1/h} \\ < 0 & \text{für } z < -\sqrt{-1/h} \text{ und } z > \sqrt{-1/h}, \end{cases}$$

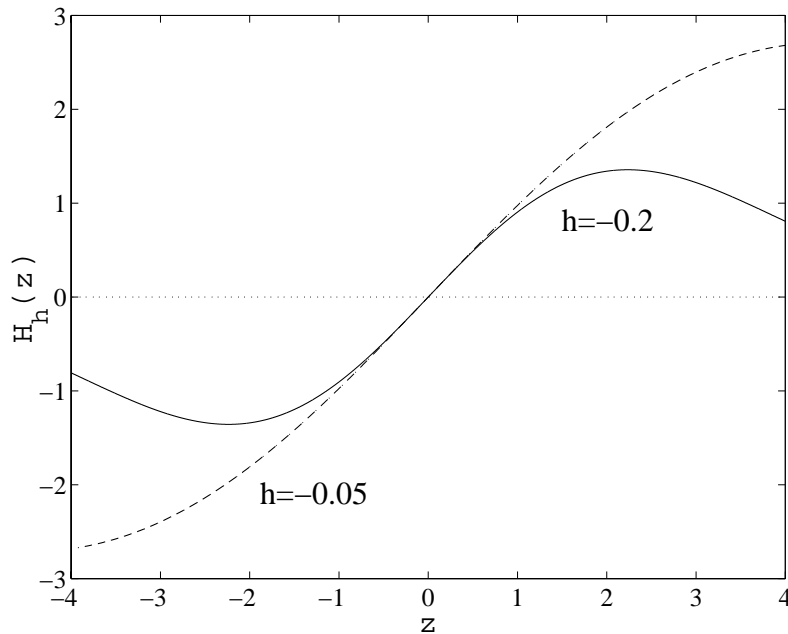
so daß  $H_h(\cdot)$  nicht eineindeutig ist. Das Minimum von  $H_h$  liegt bei  $-\sqrt{-1/h}$  und das Maximum bei  $\sqrt{-1/h}$ . Dann ist

$$A - B\sqrt{-1/h} \exp(-1/2) < X < A + B\sqrt{-1/h} \exp(-1/2),$$

so daß  $X$  einen endlichen Träger besitzt.

Die Abbildung 3 zeigt die  $h$ -Transformationen für  $h = -0.05$  und  $h = -0.2$ .

Abbildung 3:  $h$ -Transformation



Für  $h < 0$  ist die  $h$ -Transformation nicht monoton zunehmend, konkav-konvex. Für absolutbetragsmäßig kleine Werte von  $h$  verhält sich die Transformation im relevanten Bereich der meisten Verteilungen nahezu streng monoton zunehmend, konkav-konvex (siehe Abbildung 3 mit  $h = -0.05$ ). Die Einschränkung des Wertebereichs von  $X$  fällt nicht in das Gewicht. Für absolutbetragsmäßig größere Werte von  $h$  ist der Wertebereich von  $X$  deutlich eingeschränkt und die  $h$ -Transformation zwar konkav-konvex, aber nicht mehr streng monoton zunehmend (siehe Abbildung 3 mit  $h = -0.2$ ). Die fehlende Monotonie bewirkt auch, daß  $\{G \in \mathcal{F} | G = F \circ H_h^{-1} | h \in \mathbb{R}\}$  keine Wölbungs-Skalenfamilie im Sinne von Oja darstellt. Es läßt sich aber trotzdem analog zu MacGillivray (1992) nachweisen, daß die Elemente der Familie  $h$ -transformierter Verteilungen für beliebige symmetrische Ausgangsverteilungen bezüglich der partiellen Ordnung  $\preceq_S$  vergleichbar sind und speziell gilt:

$$h_1 < h_2 \implies H_{h_1}(Z) \preceq_S H_{h_2}(Z)$$

für  $Z$  symmetrisch verteilt.

### 3.3.2 Quantile

In dem Fall einer streng monoton zunehmenden Transformation  $h > 0$  übertragen sich die  $p$ -Quantile  $x_p$  der Verteilung von  $X$  und  $z_p$  der Ausgangsverteilung von  $Z$  via

$$x_p = A + BH_h(z_p).$$

Leider ist die Umkehrfunktion  $H_h^{-1}$  von  $H_h(z) = z \exp(h/2z^2)$  auch für  $h > 0$  nicht in geschlossener Form angebar. Für  $h > 0$  kann diese Umkehrfunktion mittels eines Algorithmus zur Nullstellenbestimmung von

$$z \exp(h/2z^2) = (x - A)/B$$

jedoch problemlos numerisch errechnet werden, wenn  $A$  und  $B$  bekannt sind.

Die Mehrdeutigkeit der  $h$ -Transformation für  $h < 0$  erschwert die Bestimmung der Quantile  $x_p$  in Abhängigkeit der Quantile von  $Z$ . Sei  $p < 0.5$  und  $p = P(A + BH_h(Z) \leq x_p)$ . Dann ist

$$p = P(z_1 < Z < z_2) = F_Z(z_2) - F_Z(z_1)$$

mit  $A + BH_h(z_1) = A + BH_h(z_2) = x_p$  und  $z_1 < z_2$ . Seien  $p_i = F_Z(z_i)$  für  $i = 1, 2$ , dann ist  $x_p$  eine numerisch zu bestimmende Funktion der Quantile  $z_{p_1}$  und  $z_{p_2}$ . Für  $p > 0.5$  gilt die analoge Bestimmungsgleichung

$$p = P(Z < z_1 \text{ oder } Z > z_2) = 1 - F_Z(z_2) - F_Z(z_1)$$

mit  $A + BH_h(z_1) = A + BH_h(z_2) = x_p$  und  $z_1 < z_2$ .

### 3.3.3 Variablentransformation

Die für  $h > 0$  bestimmte eindeutige Umkehrfunktion  $H_h^{-1}$  kann via

$$F_X(x; A, B, h) := P(X \leq x) = F_Z(H_h^{-1}((x - A)/B))$$

für  $x \in \mathbb{R}$  zur Bestimmung der Verteilungsfunktion von  $X$  verwendet werden. Für die zugehörige Dichtefunktion gilt:

$$f_X(x; A, B, h) = f_Z(H^{-1}((x - A)/B)) \frac{1}{H'(H^{-1}((x - A)/B))}$$

für  $x \in \mathbb{R}$ .

Für  $h < 0$  ist die Transformation bekanntlich nicht eindeutig. Jedoch sind  $H_1(z) = H_h(z)$  für  $-\sqrt{-1/h} < z < \sqrt{-1/h}$  streng monoton zunehmend und  $H_2(z) = H_h(z)$  für  $z < -\sqrt{-1/h}$  und  $z > \sqrt{-1/h}$  streng monoton abnehmend. Wenn  $H_1^{-1}$  und  $H_2^{-1}$  die zu  $H_1$  und  $H_2$  gehörenden Umkehrfunktionen sind, müssen diese für  $y \in (0, \sqrt{-1/h} \exp(-1/2))$  per numerischer Nullstellenberechnung bestimmt werden. Insgesamt folgt für die Verteilungsfunktion von  $X$

$$F_X(x; A, B, h) \begin{cases} 0 & \text{für } x \leq A - B\sqrt{-1/2} \\ F_Z(H_1^{-1}(\frac{x-A}{B}) - F_Z(H_2^{-1}(\frac{x-A}{B})) & \text{für } A - B\sqrt{-1/2} < x \leq A \\ 1 - F_Z(H_2^{-1}(\frac{x-A}{B}) - F_Z(H_1^{-1}(\frac{x-A}{B})) & \text{für } A < x \leq A + B\sqrt{-1/2} \\ 1 & \text{für } x > A + B\sqrt{-1/2}. \end{cases}$$

Die zugehörige Dichtefunktion lautet

$$f_X(x; A, B, h) = f_Z(H_1^{-1}((x - A)/B)) \frac{1}{H'_h(H_1^{-1}((x - A)/B))} \\ + f_Z(H_2^{-1}((x - A)/B)) \frac{1}{H'_h(H_2^{-1}((x - A)/B))}$$

für  $A - B\sqrt{-1/h} \exp(-1/2) < x < A + B\sqrt{-1/h} \exp(-1/2)$ .

Ist  $Z$  standardnormalverteilt, so sprechen wir in Anlehnung an Tukey kurz von der  $h$ -Verteilung. Als alternative  $h$ -transformierte Verteilungen lassen sich zum Beispiel wiederum die  $h$ -transformierte Laplace- und die  $h$ -transformierte  $t$ -Verteilung betrachten.

### 3.4 Momente

Zunächst sind sämtlichen ungeraden Momente von  $Y = H_h(Z) = Z \exp((h/2)Z^2)$  (sofern sie existieren) gleich Null, da die Verteilung symmetrisch ist.

Für  $h > 0$  existieren sämtliche Potenzmomente von  $Y$  für die standardisierte Laplace- und die standardisierte  $t$ -Verteilung nicht, so daß für  $h > 0$  nur der Fall der Standardnormalverteilung betrachtet werden soll.

**Beispiel 3.1** Sei  $Z$  standardnormalverteilt und  $h \in \mathbb{R}$ . Dann gilt

$$E(Y^k) = \frac{k!}{2^{k/2}(k/2)!} (1 - kh)^{-(k+1)/2}$$

für  $k$  ungerade, wenn  $k < 1/h$  ist, d.h. die Potenzmomente existieren bis zur Ordnung  $[1/h]$ , wobei  $[\cdot]$  den ganzzahligen Anteil bezeichnet. Speziell gilt für die Varianz und das vierte standardisierte Moment:

$$\text{Var}(Y) = E(Y^2) = (1 - 2h)^{-3/2} \quad \text{für } h < 1/2 \\ \kappa_4 = 3(1 - 4h)^{-5/2}(1 - 2h)^3 \quad \text{für } h < 1/4$$

Für  $h < 0$  können auch die Momente der auf der Laplace- Verteilung basierenden  $h$ -Verteilung angegeben werden.

**Beispiel 3.2** Seien  $Z$  standardisiert Laplace-verteilt und  $Y = Z \exp(-(|h|/2)Z^2)$ . Dann ist für  $k$  gerade

$$E(Y^k) = \frac{1}{\sqrt{2}} \int_{-\infty}^{\infty} z^k e^{-|h|kz^2 - \sqrt{2}|z|} dz$$

Nach einigen Umformungen erhält man

$$E(Y^k) = 2\sqrt{\pi|h|k} e^{1/(|h|k)} \int_0^{\infty} \frac{1}{2\pi|h|k} z^k e^{-1/2|h|k(z - (-\sqrt{2}/(|h|k)))^2} dz.$$

Bezeichnet  $E(\cdot; a, b)$  den Teilerwartungswert berechnet über dem Intervall  $(a, b)$ , so ist

$$E(Y^k) = 2(\sqrt{\pi|h|k})^{k-1} e^{1/(|h|k)} \sum_{i=1}^k \binom{k}{i} (-1)^{k-i} E\left(Z^i; \frac{2}{\sqrt{|h|k}}, \infty\right)^i \cdot \left(\frac{2}{|h|k}\right)^{k-i}$$

für  $k$  gerade,  $h < 0$  und  $Z$  standardnormalverteilt.

Für  $h < 0$  existiert auch der Erwartungswert von  $H_h(Z)^k$ , wenn  $Z$  standardisiert  $t$ -verteilt ist.

**Beispiel 3.3** Sei  $Z$   $t$ -verteilt mit  $\nu$  Freiheitsgraden. Für  $k$  gerade ist

$$E(Y^k) = 2 \frac{\Gamma((\nu + 1)/2)}{\Gamma(\nu/2)} \frac{1}{B\sqrt{\nu\pi}} \int_0^\infty z^k \frac{e^{-1/2|h|kz^2}}{(1 + z^2/\nu)^{(\nu+1)/2}} dz$$

Dieses Integral muß numerisch ausgewertet werden.

### 3.5 Bestimmung von $A$ , $B$ und $h$

Hoaglin (1983) gibt auch in diesem Falle für die Bestimmung von  $A$ ,  $B$  und  $h$  ein exploratives Verfahren an.

Ausgangspunkt ist die folgende Beziehung zwischen dem Pseudosigma  $-(x_{1-p} - x_p)/(2z_p)$  der Daten und  $z_p$ :

$$\ln \left( \frac{x_{1-p} - x_p}{-2z_p} \right) = \ln B + h z_p^2 / 2.$$

Durch eine inhomogene Einfachregression sind  $B$  und  $h$  gleichzeitig bestimmbar, wenn für  $p$  alternative Wahrscheinlichkeiten vorgegeben werden.  $A$  bestimmt sich wiederum als Median der Daten.

## 4 Generierung schiefer und platy- bzw. leptokurtischer Verteilungen

### 4.1 Wölbungs-Schiefefamilien

Statt der Intervallverteilungsfunktion wird von Balanda & MacGillivray (1990) die Spreadfunktion

$$S_F(u) = F^{-1}(u) - F^{-1}(1 - u)$$

für  $0.5 < u < 1$  betrachtet. Mit deren Hilfe kann auf  $\mathcal{F}$  eine partielle Wölbungsordnung  $\preceq_s$  mit

$$F \preceq_s G : \iff S_G(S_F^{-1}(x)) \text{ konvex für } x > \mu_F$$

mit  $\mu_F$  Median von  $F$  eingeführt werden.  $G$  heißt wiederum stärker gewölbt als  $F$ .  $\preceq_s$  geht für symmetrische Verteilungen in die Ordnung  $\preceq_S$  über, die von Van Zwet (1964) betrachtet wurde.

In Verallgemeinerung der Notation von Oja (1981) kann dann

$$WSK = \{F, G \in \mathcal{F} | F \preceq_s G \text{ oder } G \preceq_s F\}$$

als eine Wölbungs-Skalenfamilie eingeführt werden. Eine zweidimensionale Parametrisierung mittels Schiefe- und Wölbungsparameter ist aber nicht mehr so einfach möglich wie im Falle der Schiefemessung oder der Wölbungsmessung für symmetrische Verteilungen.

## 4.2 GH-Transformationen

Sollen Schiefe und Wölbung gleichzeitig modelliert werden, so bietet sich eine Verknüpfung geeignet gewählter Transformationen  $G$  und  $H$  via

$$GH(z) = G(z)/zH(z)$$

an.  $G$  bzw.  $H$  sind separat für die Schiefe bzw. die Wölbung zuständig.

## 4.3 gh-Transformationen

Dieser Ansatz wird auch von Martinez & Iglewicz (1979) verfolgt, die für  $G$  und  $H$  die bekannten Funktionen einsetzen, so daß

$$GH_{gh}(z) = \left( \frac{e^{gz} - 1}{g} \right) e^{h/2z^2} \geq -1/g$$

ist. D.h. der Wertebereich von  $X = A + BGH_{gh}(Z)$  ist wiederum auf der linken Seite abgeschnitten. Mit  $g \rightarrow 0$  geht  $GH_{gh}(z) \rightarrow H_h(z) = ze^{h/2z^2}$  und für  $h = 0$  ist  $GH_{gh}(z) = G(z)$ .

Die erste Ableitung von  $GH_{gh}$  ist:

$$GH'_{gh}(z) = 1/ge^{h/2z^2} ((g + hz)e^{gz} - hz)$$

Für  $h > 0$  ist diese Ableitung stets positiv, da

1. für  $g > 0$  gilt:  $ge^{gz} + hz(e^{gz} - 1) > 0$  wegen  $e^{gz} > 1$  für  $z > 0$  und wegen  $e^{gz} < 1$  für  $z < 0$  und
2. für  $g < 0$  gilt:  $ge^{gz} + hz(e^{gz} - 1) < 0$  wegen  $e^{gz} < 1$  für  $z > 0$  und wegen  $e^{gz} > 1$  für  $z < 0$ .

Damit lassen sich Quantile, Verteilungsfunktion und Dichtefunktion von  $X = A + BGH_{gh}(Z)$  für  $h > 0$  sehr einfach wie gewohnt angeben, wobei allerdings wiederum zu beachten ist, daß die Umkehrfunktion von  $GH_{gh}$  numerisch ermittelt werden muß.

Das Problem der fehlenden Eineindeutigkeit stellt sich wiederum für  $h < 0$ . Bezeichnen  $z_1$  bzw.  $z_2$  die beiden Lösungen von

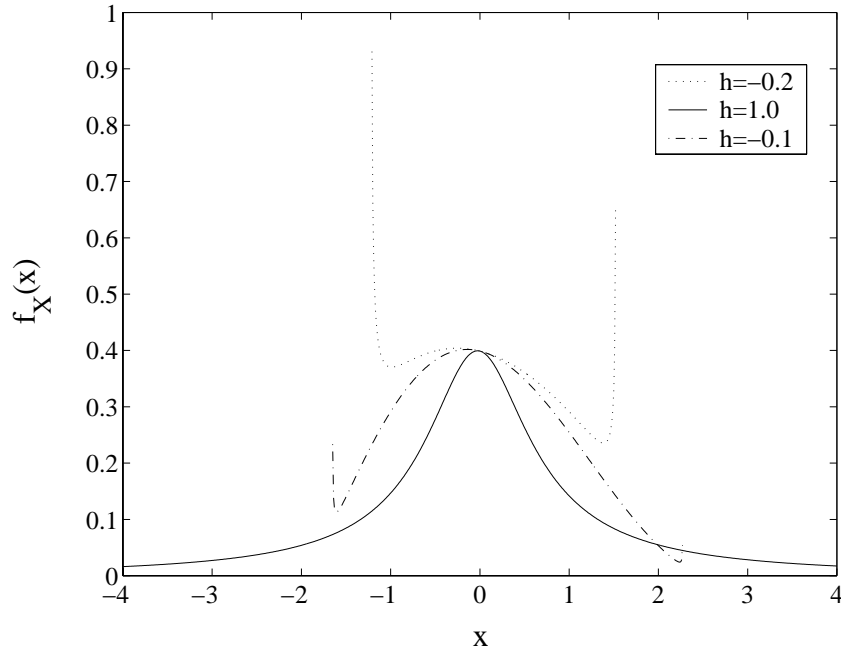
$$(g + hz)e^{gz} - hz = 0,$$

dann sind  $z_1 < 0 < z_2$ , und  $GH_{gh}(z)$  ist streng monoton zunehmend für  $z_1 < z < z_2$  und ansonsten streng monoton abnehmend. Definiert man  $GH_1(z) = GH_{gh}(z)$  für  $z_1 < z < z_2$  und  $GH_2(z) = GH_{gh}(z)$  für  $z < z_1$  oder  $z > z_2$ , dann lassen sich mit den Umkehrfunktionen von  $GH_1$  und  $GH_2$  Quantile, Verteilungsfunktion und Dichtefunktion analog zum Vorgehen bei der  $h$ -Transformation angeben und für die  $gh$ -transformierte Normal-, Laplace- und  $t$ -Verteilung herleiten.

Die Abbildung 4 zeigt die typischen Verläufe  $gh$ -transformierter Normalverteilungen. Man sieht für  $h < 0$  die Beschränktheit des Trägers und die Multimodalität der Verteilung. Insbesondere für negative und absolutbetragsmäßig größere Werte von  $h$  ergibt sich eine U-förmige, bimodale Verteilung.



Abbildung 4:  $gh$ -transformierte Normalverteilung für  $g = 0.1$  und verschiedene Werte von  $h$



MacGillivray (1992) hat die Ordnungseigenschaften  $\preceq_s$   $gh$ -transformierter Verteilungen untersucht, wobei  $Z$  wiederum einer Standardnormalverteilung folgt. Die Beweisführung verlangt aber diese Einschränkung auf die Standardnormalverteilung nicht, sondern läßt beliebige symmetrische Verteilungen zu.

1. Wird  $h$  fixiert, so ist:

$$|g_1| < |g_2| \implies GH_{g_1,h}(Z) \preceq_s GH_{g_2,h}(Z)$$

D.h. der Schiefeparameter  $g$  beeinflusst das Wölbungsverhalten. Zudem ist  $g$  kein reiner Schiefeparameter, da die Konklusion

$$g_1 < g_2 \implies GH_{g_1,h}(Z) \preceq_2 GH_{g_2,h}(Z)$$

falsch ist. Dies läßt sich mit einem Gegenbeispiel leicht zeigen.

2. Bei Fixierung von  $g$  gilt:

$$h_1 < h_2 \iff GH_{g,h_1}(Z) \preceq_s GH_{g,h_2}(Z)$$

D.h. der Parameter  $h$  ist im gewünschten Sinne ein Wölbungsparameter.

## 4.4 Momente

Allgemein gilt für die  $k$ -te Potenz von  $Y = ((e^{gZ} - 1)/g)e^{h/2Z^2}$ :

$$\begin{aligned} Y^k &= \left( \frac{e^{gZ+h/2Z^2}}{g} - \frac{e^{h/2Z^2}}{g} \right)^k \\ &= \sum_{i=0}^k \binom{k}{i} (-1)^{k-i} \frac{1}{g^k} e^{igZ+h/2kZ^2} \end{aligned}$$

Entscheidend für die Existenz des  $k$ -ten Potenzmomentes von  $Y$  ist die Existenz von

$$E \left( e^{igZ+h/2kZ^2} \right)$$

für  $i = 1, 2, \dots, k$ . Dazu reicht die Existenz der momenterzeugenden Funktion in einem hinreichend großen Intervall nicht aus, da im Exponenten  $Z$  quadratisch eingeht.

**Beispiel 4.1** *Martinez & Iglewicz (1979), S. 359 haben die  $k$ -ten Potenzmomente von  $Y$  hergeleitet, wenn  $Z$  standardnormalverteilt ist. Es gilt*

$$E(Y^k) = \frac{1}{g^k} \frac{1}{\sqrt{1-kh}} \sum_{i=0}^k \binom{k}{i} (-1)^i e^{1/2i^2g^2/(1-kh)}$$

für  $k < -1/h$ .

**Beispiel 4.2** *Wir betrachten wiederum die Laplace-Verteilung für  $Z$ . Dann ist*

$$E \left( e^{igZ+h/2hkZ^2} \right) = \frac{1}{\sqrt{2}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{igz+h/2kz^2-\sqrt{2}|z|} dz.$$

Für  $h > 0$  konvergiert dieses Integral offensichtlich nicht, da der quadratische Term im Exponenten dominiert. Somit existiert dieses Moment nur für  $h < 0$ . In diesem Falle ist  $h = -|h|$ . Nach einer Reihe elementarer Umformungen erhält man

$$\begin{aligned} E \left( e^{igZ+h/2hkZ^2} \right) &= \sqrt{\frac{\pi}{|h|k}} 2 \left( e^{(\sqrt{2}+ig)^2/(2|h|k)} \Phi \left( -\frac{\sqrt{2}+ig}{\sqrt{|h|k}} \right) \right. \\ &\quad \left. + \left( e^{(\sqrt{2}-ig)^2/(2|h|k)} \left( 1 - \Phi \left( -\frac{\sqrt{2}+ig}{\sqrt{|h|k}} \right) \right) \right) \right), \end{aligned}$$

wobei  $\Phi$  die Verteilungsfunktion der Standardnormalverteilung bezeichnet.

## 4.5 Bestimmung von $A$ , $B$ , $g$ und $h$

$A$  und  $g$  bestimmen sich wie im Falle der verallgemeinerten  $g$ -Verteilung. Wegen

$$x_{(1-p)} - x_{(0.5)} = \frac{B}{g} (e^{-gz_p} - 1) e^{h/2z_p^2}$$

können  $B$  und  $h$  durch eine inhomogene Regression von

$$\ln \frac{g(x_{(1-p)} - x_{0.5})}{\exp(-gz_p - 1)}$$

und  $z_p^2/2$  bestimmt werden. Deren Achsenabschnitt liefert  $\ln B$ .

# 5 Anpassung von Finanzmarktdaten

## 5.1 Gütemaße der Anpassung

Die Güte der Anpassung kann durch den Abstand zwischen der empirischen Verteilungsfunktion und der durch Berechnung von  $g$ ,  $h$  und  $B$  angepaßten Verteilung beurteilt werden.

In Anlehnung an Mittnik et al. (1997) werden der Kolmogorov-Abstand und die Anderson-Darling-Statistik verwendet. Der Kolmogorov-Abstand ist durch

$$\text{KD} = 100 \times \sup_{x \in \mathbb{R}} |F_{emp}(x) - F_X(x; A, B, g, h)|$$

gegeben, wobei

$$F_{emp}(x) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n I_{(-\infty, x]}(x_i)$$

die empirische Verteilungsfunktion ist, wobei  $I_A(x)$  die Indikatorfunktion bezeichnet, die den Wert 1 annimmt, wenn  $x \in A$  ist und sonst 0 ist. Der Kolmogorov-Abstand wird insbesondere durch den Bereich um den Median bestimmt, da absolute Abweichungen betrachtet werden.

Grundbaustein der Anderson-Darling-Statistik ist die normierte Differenz

$$\text{AD}(x) = |F_{emp}(x) - F_X(x; A, B, g, h)| / \sqrt{F_X(x; A, B, g, h)(1 - F_X(x; A, B, g, h))}.$$

Diese normierte Differenz legt das Schwergewicht auf die Randbereiche der Verteilung, da dort im Regelfall die Statistik

$$\text{AD0} = \sup_{x \in \mathbb{R}} \text{AD}(x)$$

am größten ist. Dieser Extremwert wird aber u.U. von einzelnen Ausreißern determiniert, so daß zusätzlich zu AD0 der zweitgrößte (AD1) und drittgrößte Wert (AD2) für die Beurteilung der Anpassungsgüte verwendet werden sollen.

Allgemein üblich ist die Beurteilung der Anpassung durch logarithmierte Likelihoodwerte. Da die Parameter  $A$ ,  $B$ ,  $g$  und  $h$  nicht über eine Maximum-Likelihood-Schätzung bestimmt wurden, ist dieses Kriterium hier nicht anwendbar.

## 5.2 Fragestellungen

Im folgenden sollen insgesamt drei Fragestellungen diskutiert werden:

1. Zunächst erfolgt ein Vergleich der  $gh$ -Verteilung mit anderen gebräuchlichen Verteilungen. Eine umfangreiche Studie zum Anpassungsverhalten liegt von Mittnik et al. für den Nikkei-Index vor. Deshalb wird dieser Wert herausgegriffen, um die  $gh$ -Verteilungen zu analysieren.
2. Anschließend werden einige Repräsentanten von Titeln des Deutschen Aktienindex und des neuen Marktes betrachtet, um die  $gh$ -Verteilungen mit der  $gh$ -transformierten Laplace- und der  $gh$ -transformierten  $t$ -Verteilung zu vergleichen.

3. Da die Momente der  $gh$ -Verteilung nur für bestimmte Parameterkonstellationen existieren, können Aussagen über deren Existenz für diverse Finanzmarkttitle gemacht werden.

### 5.3 Vergleich der $gh$ -transformierten Verteilungen am Beispiel des Nikkei-Indexes

In der Arbeit von Mittnik et al. (1997) sind insgesamt 8 parametrische Verteilungsfamilien und ihre Anpassungsgüte an die empirische Verteilung von wöchentlichen Daten der Renditen des Nikkei-Indexes von 1968 bis 1994 untersucht worden. Diese Datenreihe eignet sich deswegen besonders, da sie über ausgeprägte Schiefe und Leptokurtosis verfügt. Die besten Anpassungsergebnisse in der Studie von Mittnik et al. erzielte die Familie der stabilen asymmetrischen Verteilungen, für deren charakteristische Funktion gilt:

$$\ln E(e^{itY}) = \begin{cases} i\mu t - |\sigma t|^\alpha [1 - i\beta \text{sign}(t) \tan(\pi\alpha/2)] & \text{für } \alpha \neq 1 \\ i\mu t - |\sigma t| [1 - i\beta 2/\pi \text{sign}(t) \ln |t|] & \text{für } \alpha = 1 \end{cases}$$

mit  $0 < \alpha \leq 2$ ,  $-1 \leq \beta \leq 1$ ,  $\sigma > 0$ ,  $\mu \in \mathbb{R}$  und  $i = \sqrt{-1}$ .

Die Tabelle 1 stellt die Anpassungsgüte zusammen, wobei als Referenz noch die übliche, aber aufgrund der Stylized Facts von Finanzmarktdaten unzutreffende angepaßte Normalverteilung angegeben wird.

Tabelle 1: Vergleich der Anpassungsgüte  $gh$ -transformierter Verteilungen mit anderen Verteilungen am Beispiel des Nikkei-Index

Modell	KS	AD0	AD1	AD2
$\alpha$ -stabile V.	3.00	0.085	0.084	0.081
Normalv.	6.89	4.92	2.81	1.07
Normal- $gh$ -V.	2.547	0.0778	0.0756	0.0725
Laplacev.	4.21	0.1228	0.1178	0.1126
Laplace- $gh$ -V.	4.25	0.1134	0.1090	0.1073
$t(5)$ -V.	4.50	0.1260	0.1070	0.1069
$t(5)$ - $gh$ -V.	3.33	0.1193	0.1168	0.1163

Die  $gh$ -transformierte Normalverteilung besitzt eine deutlich bessere Anpassung als die Normalverteilung, was zu erwarten war. Ein solcher Verbesserungsschub ist von der Laplace- und der  $t(5)$ -Verteilung zu ihren  $gh$ -transformierten Varianten nicht zu erkennen (siehe auch Abbildung 5). Dies ist auch zu erwarten, da die Laplace- und die  $t(5)$ -Verteilung aufgrund ihrer Leptokurtosis bereits die Daten besser beschreiben können als die Normalverteilung, so daß nur geringe Zuwächse der Anpassungsgüte möglich sind. Auffällig ist aber, daß die  $gh$ -Transformationen der Laplace- und  $t(5)$ -Verteilung sich deutlich schlechter als die  $gh$ -transformierte Normalverteilung verhalten. Diese wiederum ist leicht besser als die  $\alpha$ -stabilen Verteilungen, die sich in der Studie von Mittnik et al. (1997) durchgesetzt haben und damit ein ernstzunehmendes Modell für die Beschreibung von Finanzmarktdaten.

## 5.4 Untersuchung $gh$ -transformierter Verteilungen

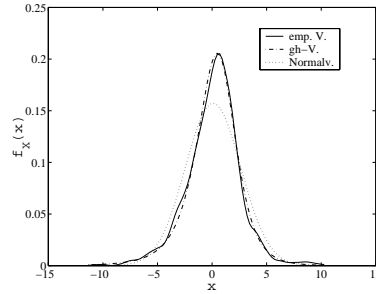
Die Tabelle 2 vergleicht die Anpassungsgüte alternativer  $gh$ -transformierte Verteilungen.

Tabelle 2: Anpassungsverhalten  $gh$ -transformierter Verteilungen für ausgewählte Werte Aktienindizes (k.E.=kein Ergebnis)

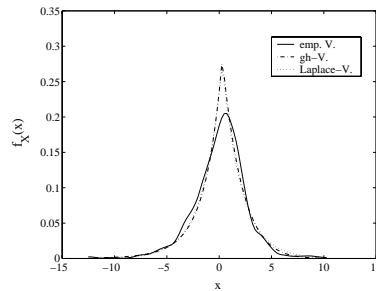
Wert	B	g	h	KS	AD0
Nikkei	Wochendaten vom 31.7.1983 bis 9.4.1995				
Normal- $gh$ -V.	1.9520	-0.1336	0.1457	2.5473	0.0778
Laplace- $gh$ -V.	2.4981	-0.1269	0.0018	4.2518	0.1283
$t(3)$ - $gh$ -V.	3.0868	-0.1560	-0.0345	k.E.	k.E.
$t(5)$ - $gh$ -V.	2.5140	-0.1352	0.0019	3.3254	0.1193
$t(7)$ - $gh$ -V.	2.3460	-0.1333	0.0297	3.2205	0.1045
DAX	Tagesdaten vom 1.1.1988 bis 31.8.1994				
Normal- $gh$ -V.	0.8065	0.0220	0.2101	2.2069	0.0642
Laplace- $gh$ -V.	1.0504	0.1172	0.0406	2.7574	0.0875
$t(3)$ - $gh$ -V.	1.3159	0.0215	-0.0018	2.2059	0.0909
$t(5)$ - $gh$ -V.	1.0559	0.0179	0.0426	2.3857	0.0562
$t(7)$ - $gh$ -V.	0.9792	0.0188	0.0770	2.3756	0.0575
Dow Jones	Tagesdaten vom 1.1.1988 bis 31.8.1994				
Normal- $gh$ -V.	0.6265	-0.0233	0.1813	0.8950	0.0668
Laplace- $gh$ -V.	0.8076	-0.0185	0.0247	2.6476	0.0770
$t(3)$ - $gh$ -V.	0.9999	-0.0203	-0.0121	0.9368	0.1087
$t(5)$ - $gh$ -V.	0.8100	-0.0192	0.0270	1.3652	0.0369
$t(7)$ - $gh$ -V.	0.7545	-0.0204	0.0578	1.3818	0.0376

Alle drei Indizes zeigen einen negative Wert für  $h$ , wenn eine  $t(3)$ -Verteilung  $gh$ -transformiert wird. Dieser Wert ist für den Nikkei-Index absokutbetragsmäßig so groß, daß versucht wird, eine U-förmige Verteilung anzupassen, was nicht gelingt, so daß für die Kolmogorov-Statistik und die Anderson-Darling-Statistik kein Wert ausgewiesen wird. Es ist also nicht ratsam, die Leptokurtosis der Daten bereits derart stark zu erfassen, daß die  $gh$ -Transformation in Richtung einer platykurtischen Verteilung wirken muß.

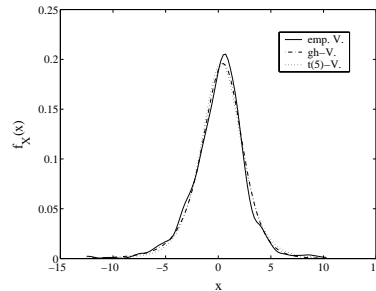
Abbildung 5: Anpassung verschiedener  $gh$ -transformierter Verteilung für den Nikkei-Index



(a)  $gh$ -transformierte Normalverteilung



(b)  $gh$ -transformierte Laplace-Verteilung



(c)  $gh$ -transformierte  $t(5)$ -Verteilung

Kolmogorov-Statistik zeigt ein uneinheitliches Bild. Immer gehört aber die  $gh$ -transformierte Standardnormaverteilung zu den besten. Dies besteht im wesentlichen auch die Anderson-Darling-Statistik, obwohl für den DAX30 und den Dow Jones auch eine  $gh$ -Transformation der  $t$ -Verteilung mit 5 bzw. 7 Freiheitsgraden die besten Ergebnisse liefert. Die recht kleinen Werten von  $g$  und  $h$  sprechen aber dafür, daß bereits die untransformierte  $t$ -Verteilung gute Ergebnisse liefert. Die Laplace-Verteilung ist nicht konkurrenzfähig, da sie aufgrund der extremen Spitzgipfeligkeit gerade im Zentrum der

Verteilung zu schlechten Anpassungsergebnissen führt. Die Anforderungen an die Funktionen  $G$  und  $H$  verhindern, daß dieses Defizit durch eine  $gh$ -Transformation behoben wird.

Diese Ergebnisse für die Aktienindizes werden auch von einzelnen DAX30-Werten bestätigt, wie die Tabelle 3 zeigt.

Tabelle 3: Anpassungsverhalten  $gh$ -transformierter Verteilungen für ausgewählte Werte aus dem DAX30

Wert	B	g	h	KS	AD0
Commerzbank	Tagesdaten vom 1.1.1988 bis 31.12.1998				
Normal- $gh$ -V.	1.1208	0.0284	0.1685	2.6383	0.0847
Laplace- $gh$ -V.	1.4444	0.0270	0.0161	2.2792	0.1546
$t(3)$ - $gh$ -V.	1.7874	0.0327	-0.0194	k.E.	k.E.
$t(5)$ - $gh$ -V.	1.4572	0.0288	0.0176	3.04339	0.0616
$t(7)$ - $gh$ -V.	1.3522	0.0284	0.0472	3.0597	0.0619
Bayer AG	Tagesdaten vom 1.1.1988 bis 31.12.1998				
Normal- $gh$ -V.	1.1154	-0.0031	0.1561	1.0211	0.0306
Laplace- $gh$ -V.	1.4268	-0.0032	0.0103	2.1043	0.0456
$t(3)$ - $gh$ -V.	1.7596	-0.0039	-0.0232	k.E.	k.E.
$t(5)$ - $gh$ -V.	1.4332	-0.0033	0.0118	1.7149	0.0374
$t(7)$ - $gh$ -V.	1.3380	-0.0032	0.0398	1.7682	0.0385
SAP AG	Tagesdaten vom 18.6.1990 bis 31.12.1998				
Normal- $gh$ -V.	1.6664	0.0386	0.1955	2.6777	0.0813
Laplace- $gh$ -V.	2.1939	0.0368	0.0270	1.2284	0.1188
$t(3)$ - $gh$ -V.	2.7662	0.0446	-0.0155	3.1908	0.1029
$t(5)$ - $gh$ -V.	2.2189	0.0392	0.0265	3.6582	0.0842
$t(7)$ - $gh$ -V.	2.0529	0.0387	0.0600	3.5938	0.0823
Volkswagen	Tagesdaten vom 1.1.1988 bis 31.12.1998				
Normal- $gh$ -V.	1.4116	-0.0443	0.1722	1.4016	0.0362
Laplace- $gh$ -V.	1.8126	-0.0463	0.0196	3.1989	0.0758
$t(3)$ - $gh$ -V.	2.2457	-0.0432	-0.0166	1.5092	0.0514
$t(5)$ - $gh$ -V.	1.8207	-0.0464	0.0214	0.8758	0.0325
$t(7)$ - $gh$ -V.	1.6967	-0.0442	0.0514	0.8791	0.0298

Ein Test mit Aktienwerten aus dem neuen Markt ist deshalb interessant, weil recht wenige Daten vorliegen und aufgrund einer Anfangseuphorie eine ausgeprägteres Rechtssteilheit (Linksschiefe) zu erkennen ist als bei den DAX30-Werten. Die Tabelle 4 stellt die Ergebnisse zusammen.

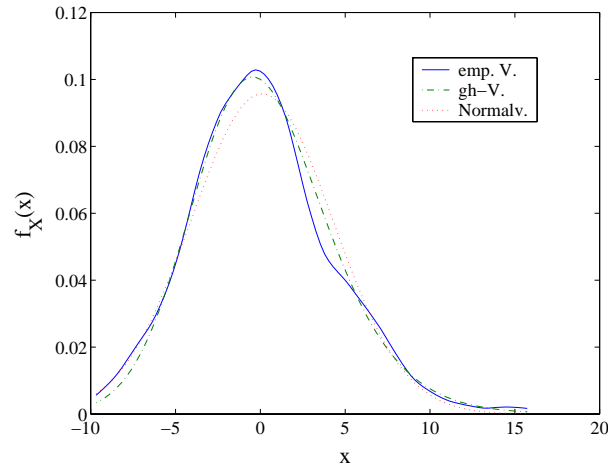
Tabelle 4: Anpassungsverhalten  $gh$ -transformierter Verteilungen für ausgewählte Werte aus dem NEMAX50

Wert	B	g	h	KS	AD0
Mobilcom	Tagesdaten vom 10.3.1997 bis 22.2.2000				
Normal- $gh$ -V.	3.4462	0.1618	0.1860	2.4382	0.0488
Laplace- $gh$ -V.	4.4984	0.1354	0.0234	2.7919	0.0630
$t(3)$ - $gh$ -V.	5.6413	0.1532	-0.0188	2.4933	0.0499
$t(5)$ - $gh$ -V.	4.5319	0.1421	0.0238	2.7710	0.0597
$t(7)$ - $gh$ -V.	4.2036	0.1449	0.0563	2.6909	0.0565
Consors	Tagesdaten vom 26.4.1999 bis 22.2.2000				
Normal- $gh$ -V.	3.9879	0.1226	0.0211	4.8744	0.1017
Laplace- $gh$ -V.	4.7402	0.1078	-0.0562	k.E.	k.E.
$t(3)$ - $gh$ -V.	5.5277	0.1067	-0.0647	k.E.	k.E.
$t(5)$ - $gh$ -V.	4.7006	0.1056	-0.0519	4.2944	0.0905
$t(7)$ - $gh$ -V.	4.4924	0.1165	-0.0412	4.6635	0.0975
Qiagen	Tagesdaten vom 23.10.1996 bis 22.2.2000				
Normal- $gh$ -V.	2.3556	0.1012	0.1708	3.6334	0.0788
Laplace- $gh$ -V.	3.0771	0.1092	0.0127	2.8667	0.0634
$t(3)$ - $gh$ -V.	3.8517	0.1249	-0.0273	4.2549	0.0918
$t(5)$ - $gh$ -V.	3.1091	0.1169	0.0117	4.8716	0.1046
$t(7)$ - $gh$ -V.	2.8847	0.1249	-0.0273	4.2549	0.0918

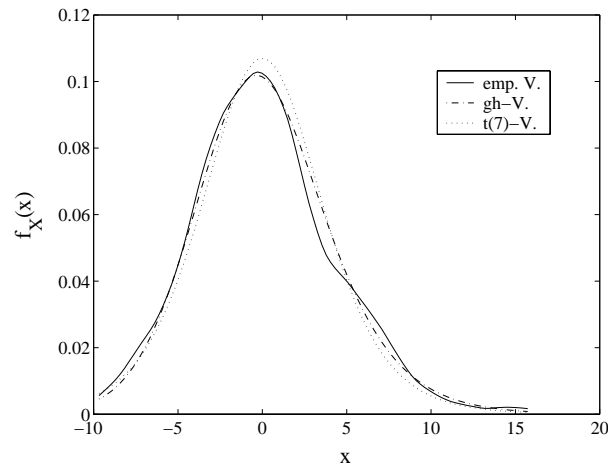
Wiederum zeigt sich an der Kolmogorov- und der Anderson-Darling-Statistik, daß die  $gh$ -transformierte Normalverteilung am besten "fitted". Dies gilt so eindeutig nicht für die Consors-Aktie. Für diese ist auffällig, daß bereits eine  $t$ -Verteilung mit 7 Freiheitsgraden die Leptokurtosis der Daten zu stark erfaßt, so daß die  $gh$ -Transformation einen recht deutlich negativen Wert für  $h$  ausweist. Daß die Daten bereits recht gut normalverteilt sind, zeigt sich an dem kleinen Wert  $h = 0.0211$  für die  $gh$ -transformierte Standardnormalverteilung. Der Schiefeparameter ist recht stabil über die verschiedenen Verteilungsfamilien.



Abbildung 6: Anpassung verschiedener  $gh$ -transformierter Verteilung für die Consors-Aktie



(a)  $gh$ -transformierte Normalverteilung



(b)  $gh$ -transformierte  $t(5)$ -Verteilung

## 5.5 Existenz von Momenten

Die Momente  $gh$ -transformierter Verteilungen existieren im allgemeinen nicht oder nur bis zu einer maximalen Ordnung. Insbesondere ist die Existenz der Potenzmomente der  $gh$ -transformierten Normalverteilung nur bis zur Ordnung  $[1/h]$  gesichert, wenn  $h > 0$  ist, wobei  $[.]$  den ganzzahligen Anteil bezeichnet. Die Anpassung von  $gh$ -transformierten Normalverteilungen an die oben erwähnten Finanzmarktdaten zeigt, daß der Schätzwert für den Parameter  $h$  stets positiv sind und zwischen 0.0211 (Consors-Aktie) und 0.2101 (DAX30) liegen, wobei allerdings der Großteil der Werte recht stabil zwischen 0.15 und 0.2 liegt. Dies bedeutet, daß im Falle der Consors-Aktie die Existenz der Potenzmomente nur bis zur vierten Ordnung sichergestellt ist. Beim DAX30 existiert die Potenzmomente

sogar bis zur Ordnung 47. Für alle anderen Werte ist die Existenz bis zur Ordnung 5 ( $h = 0.2$ ) bzw. 6 ( $h = 0.15$ ) gesichert. Die spricht dafür, daß die von Mitnik et al. (1997) favorisierten  $\alpha$ -stabile Verteilungen mit der Nichtexistenz der Varianz zu rigorese Anforderungen an ein Verteilungsmodell für Finanzmarktdaten stellen.

## 6 Weitere Verteilungsfamilien

Es soll nicht der Eindruck entstehen, als ob die  $gh$ -Transformation der einzige Vorschlag zur Einführung höherparametrisierter Verteilungsfamilien sei. In der Literatur gibt es eine Vielzahl weiterer Ansätze, von denen exemplarisch einige wenige herausgegriffen werden sollen.

Wir haben bislang lediglich den Originalvorschlag von Tukey (1960) modifiziert. Mittlerweile gibt es andere Vorschläge, die die  $gh$ -Verteilungen weiterentwickeln. MacGillivray & Cannon haben die verallgemeinerte  $gh$ -Verteilung eingeführt, die wieder von der Standardnormalverteilung ausgeht, aber eine andere Schiefetransformation verwendet, die eine bessere Separation von Schiefe und Wölbung erlaubt als die  $gh$ -Transformation (siehe Haynes et al. (1997)). Sie schlagen

$$A + B \left( 1 + c \frac{1 - \exp(-gz)}{1 + \exp(-gz)} \right) z \exp(h/2z^2)$$

für  $c \in (0, 0.84)$  als Transformation vor. Ein weiterer Vorschlag von MacGillivray & Cannon modifiziert zusätzlich die Wölbungstransformation und führt zur sog.  $g - k$ -Verteilung. Die zugehörige Transformation lautet:

$$A + B \left( 1 + c \frac{1 - \exp(-gz)}{1 + \exp(-gz)} \right) z(1 + z^2)^k.$$

Im Gegensatz zur  $gh$ -Transformation liefert diese Transformation auch für Werte  $k < 0$  Verteilungen mit  $\mathbb{R}$  als Träger, die unimodal sind. Die  $gh$ -Transformation führt für  $h < 0$  immer zu einer bimodalen  $U$ -förmigen Verteilung mit einem kompakten Intervall als Träger.

Ebenfalls mit Hilfe der Technik der Variablentransformation ausgehend von der Normalverteilung werden die Johnson-Systeme eingeführt (siehe Johnson, N.L. (1949)). Insgesamt werden drei Systeme betrachtet mit  $F(x) := \Phi(b(x))$ , wobei

$$S_L: b(x) = B \log x + A,$$

$$S_U: b(x) = B \sinh^{-1}(x) + A,$$

$$S_B: b(x) = B \log(x/(1-x)) + A.$$

MacGillivray (1992) untersucht die Ordnungseigenschaften dieser Systeme für Schiefe und Wölbung.

Die verallgemeinerte  $\lambda$ -Verteilung stellt eine Weiterentwicklung von Tukeys  $\lambda$ -Verteilung (siehe Hastings et al. (1947)) dar und wurde zuerst von Ramberg & Schmeiser (1974) betrachtet. In ihrer Parametrisierung ist sie durch die Quantilsfunktion

$$F^{-1}(u) = \lambda_1 + \frac{u^{\lambda_3} - (1-u)^{\lambda_4}}{\lambda_2}$$

gegeben, wobei  $\lambda_3$  und  $\lambda_4$  Gestaltungsparameter sind, die Schiefe und Wölbung beeinflussen. King & Gillivray (1999) benutzen als Schätzmethode für die Parameter die rechenintensive sog. Starhip-Methode. Diese ist immer anwendbar, wenn von einer Variablentransformation ausgegangen wird, um zu einer Verteilungsfamilie zu gelangen, wie es z.B. bei der  $gh$ -Verteilung der Fall ist. Die Daten werden mit der inversen Transformation für ein Spektrum von Parameterwerten transformiert und die "optimalen" Parameter derart bestimmt, daß sich bezogen auf eine Teststatistik für einen Anpassungstest auf Normalverteilung der kleinste Wert ergibt, d.h. der "Abstand" zur Normalverteilung am geringsten ist.

Parzen (1979) klassifiziert Verteilungen mit Hilfe der Dichte-Quantilsfunktion  $f(F^{-1}(u))$  für  $u \in (0, 1)$ . Scheffner (1998) greift diese Vorgehensweise und wählt für die Dichte-Quantilsfunktion eine flexible Funktionsform, die auch vielfältige Formen von Schiefe und Wölbung der zugrundeliegenden Verteilung zuläßt. Es handelt sich um die Betafamilie

$$f(F^{-1})(u) = Bu^\alpha(1 - u)^\beta.$$

mit einer geeignet zu wählenden Konstanten  $B$ . Schätzmethode werden  $B$ ,  $\alpha$  und  $\beta$  werden von Scheffner diskutiert.

## 7 Zusammenfassung

Mittels einfacher Variablentransformation konstruierte Tukey (1960) ausgehend von einer standardnormalverteilten Zufallsvariablen schief und leptokurtisch bzw. platykurtisch verteilte Zufallsvariablen. Deren Verteilung werden als  $g$ -,  $h$ - oder  $gh$ -Verteilung bezeichnet. In einem theoretischen Teil wird zunächst abgeleitet, welche Eigenschaften  $gh$ -Verteilungen haben, wenn sie nicht von der Normalverteilung, sondern von beliebigen symmetrischen Verteilungen ausgehen. Dabei zeigt sich, daß die von MacGillivray (1992) für die  $gh$ -Verteilung auf Basis der Normalverteilung abgeleiteten Schiefe- und Wölbungsordnungseigenschaften erhalten bleiben. Die Existenz von Potenzmomenten wird untersucht, wenn als Ausgangsverteilung eine Laplace- oder eine  $t$ -Verteilung verwendet wird. Es zeigt sich, daß bis auf wenige Fälle die Potenzmomente im allgemeinen nicht existieren. Schließlich wird das Trade-off-Verhalten zwischen leptokurtischer Ausgangsverteilung und Wölbungsparameter  $h$  an stark leptokurtischen Finanzmarktdaten untersucht. Die  $t$ -Verteilung kann diese Daten bekanntlich recht gut beschreiben, so daß der Parameter  $h$  nur noch einen Restanpassungsbedarf an die Leptokurtosis befriedigen muß. Anders verhält es sich mit der Normalverteilung, die als Modell für Finanzmarktdaten ungeeignet ist, so daß der Parameter  $h$  eine starke Wölbungskorrektur vornehmen muß. Es zeigt sich, daß dieser starke Anpassungsbedarf von dem Parameter  $h$  gut bewältigt wird. Die Anpassung ist deutlich besser als bei einer leichten Modifikation der bereits leptokurtischen Laplace- oder  $t$ -Verteilung. Somit scheint sich eine Modifikation der Ausgangsverteilung für die Modellierung realer Daten mit hoher Leptokurtosis nicht zu empfehlen. Die originale  $gh$ -Verteilung von Tukey (1960) erweist sich als hinreichend flexibel. Mit dieser  $gh$ -Verteilung sind auch Aussagen über die Existenz der Momente machbar. Es zeigt sich für alle betrachteten Renditereihen, daß die Momente bis zur Ordnung 6 existieren. Über

höhere Momente ist eine generelle Aussage nicht machbar. Dieses Ergebnis widerspricht aber der Behauptung, daß die Varianz der Renditen nicht existiert und somit die stabilen Verteilungen als Modell am besten geeignet sind.

Interessante Fragestellungen sind bislang unbeantwortet geblieben. So ist zu untersuchen, ob es sich lohnt, schiefe Verteilungen als Ausgangsverteilungen der  $gh$ -Transformation zu betrachten, so daß der Schiefeparameter  $g$  nur noch eine Restschiefe anpassen muß. Ein Vergleich unterschiedlicher Schätzmethode für die  $gh$ -Verteilungen bietet sich an. Hier stehen neben der Quantilsschätzung von Hoaglin (1983), die Maximum-Likelihood-Schätzung, die Starship-Methode und bayesianische Verfahren zur Verfügung. Ein Vergleich mit der verallgemeinerten  $gh$ -Verteilung und der  $g - k$ -Verteilung von Mac-Gillivray & Cannon (1997) steht ebenfalls aus. Schließlich bietet sich im Rahmen der Modellierung von Finanzmarktdaten der Einsatz der  $gh$ -Verteilungen in GARCH-Modellen an.

## Literatur:

1. Badrinath, S.G. & Chatterjee, S. (1988). On measurement skewness and elongation in common stock return distributions. *Journal of Business* **61**, 451-472.
2. Badrinath, S.G. & Chatterjee, S. (1988). A data-analytic look at skewness and elongation in common stock-return-distributions. *Journal of Business & Economic Statistics* **61**, 451-472. Cambridge.
3. Finnegan, G.P. & Heavlin, W.D. (1994). Application of Hoaglin's G and H curves to process specifications. *ASA Proceedings of the Physical and Productivity Section*, 146-150.
4. Grottko, M. (1999). Generierung schiefer Verteilungen mittels Skalenparametersplitting. *Diskussionspapiere der Lehrstühle für Statistik der Universität Erlangen-Nürnberg* Nr. **30**.
5. Haynes, M.A., MacGillivray, H.L. & Mengersen, K.L. (1997). Robustness of ranking and selection rules using generalised  $g$ -and- $k$  distributions. *Journal of Statistical Planning and Inference* **65**, 45-66.
6. Hoaglin, D.C. (1983). Summarizing shape numerically: The  $g$ -and- $h$  distributions. In: Hoaglin, D.C., Mosteller, F. & Tukey, J.W. (eds.). *Data analysis for tables, trends, and shapes*. New York, Wiley.
7. Hoaglin, D.C. & Tukey, J.W. (1989). Empirical bounds for quantile based estimates of  $g$  in the  $g$ -and- $h$  distributions. Unpublished manuskript, Harvard University, Dept. of Statistics.
8. Kariya, T., Tsukuda, Y., Maru, J., Matsue, Y. & Omaki, K. (1995). An extensive analysis of the Japanese markets vis S. Taylors model. *Financial Engineering and the Japanese Markets*. **2**, 15-86.
9. MacGillivray, H.L. (1992). Shape properties of the  $g$ -and- $h$  and Johnson families. *Communications in Statistics-Theory and Methods* **21**, 1233-1250.
10. Martinez, J. & Iglewicz, B. (1984). Some properties of the Tukey  $g$  and  $h$  family of distributions. *Communications in Statistics-Theory and Methods* **13**, 353-369.
11. Mittnik, S., Paolella, M.S. & Rachev, S.T. (1997). Unconditional and conditional distributional models for the Nikkei Index. *Arbeiten aus dem Institut für Statistik und ökonometrie der Christian-Albrechts-Universität Kiel* Nr. **107**.
12. Parzen, E. (1979). Nonparametric statistical data modelling. *Journal of the American Statistical Association* **74**, 105-120.
13. Rayner, G.D. & MacGillivray, H.L. (1999). Numerical maximum-likelihood estimation for the  $g$  - and -  $k$  and generalised  $g$  - and -  $h$  distributions. *erscheint in Statistics and Computing*

14. Tukey, J.W. (1960). The practical relationship between the common transformations of counts of amounts. Technical Report **36**. Princeton University Statistical Techniques Research Group. Princeton.
15. Tukey, J.W. (1977) *Exploratory data analysis*. Addison-Wesley, Reading, MA.