

Generierung schiefer Verteilungen mittels Skalenparametersplittung

Martin Grottko

Friedrich-Alexander-Universität Erlangen-Nürnberg
Wirtschafts- und Sozialwissenschaftliche Fakultät
Lehrstuhl für Statistik und Ökonometrie
Lange Gasse 20
90403 Nürnberg
Germany

Abstract

There are several proposals of adding a skewness parameter into a symmetric distribution. Most of them are combined with a certain distribution. The following working paper will present an universal method of generating an asymmetric distribution.

As an application this method is used to make the Generalized-t-distribution skewed – thus producing the Skewed-Generalized-t (SGT-), the SGT2- and the SGT3-distribution. These distributions include several well known distributions like the Normal-, Laplace-, t-, Cauchy- and Box-Tiao-distribution. They also allow a higher leptokurtosis, what makes them suitable for the estimation of financial data.

1 Einleitung

Für die Einführung eines Schiefeparameters in symmetrische Verteilungen existieren zahlreiche Vorschläge, die sich meist auf eine bestimmte Verteilung beziehen. In nachfolgendem Arbeitspapier soll ein allgemeines Verfahren der Generierung einer asymmetrischen Verteilung vorgestellt werden.

Als Anwendung soll anschließend die Generalized-t-Verteilung mit diesem Ansatz in unterschiedlicher schiefer Form dargestellt werden, es ergeben sich die Skewed-Generalized-t- (SGT-), die SGT2- und die SGT3-Verteilung. Da all diese Verteilungen zahlreiche weitere Verteilungen, wie die Normal-, Laplace-, t-, Cauchy- und die Box-Tiao-Verteilung enthalten und auch eine höhere Kurtosis zulassen, eignen sie sich beispielsweise für die Anwendung auf Finanzmarktdaten. Schätzungen der Verteilung der Renditen mit der SGT2-Verteilung werden in Abschnitt 4 durchgeführt, was auch einen Eindruck davon gibt, ob Asymmetrie bei Finanzmarktdaten eine Rolle spielt.

2 Generierung schiefer Verteilungen mittels Skalenparametersplittung

Zunächst soll in Anlehnung an Handl (1985), S. 116, eine Definition für das Vorliegen einer schiefen Verteilung gegeben werden.

Definition:

Eine stetige Verteilungsfunktion F_x heißt rechtsschief, wenn gilt

$$F_x(x_{0,5} + a) \leq 1 - F_x(x_{0,5} - a) \text{ für alle } a \geq 0$$

und

$$F_x(x_{0,5} + a) < 1 - F_x(x_{0,5} - a) \text{ für mindestens ein } a \geq 0,$$

wobei es sich bei $x_{0,5}$ um den Median der Verteilung handelt.

Das bedeutet, daß sich die Wahrscheinlichkeitsmasse einer rechtsschiefen Verteilung links vom Median schneller aufbaut als rechts vom Median.

Definition:

Analog heißt F_x linksschief, wenn

$$F_x(x_{0,5} - a) \geq 1 - F_x(x_{0,5} - a) \text{ für alle } a \geq 0$$

und

$$F_x(x_{0,5} - a) > 1 - F_x(x_{0,5} - a) \text{ für mindestens ein } a \geq 0.$$

Ausgangspunkt zur Bildung einer schiefen Verteilung ist eine beliebig symmetrisch verteilte stetige Zufallsvariable X mit der Dichtefunktion $f(x)$, deren Median o. B. d. A. bei $x_{0,5} = 0$ liegen soll. Die Funktion wird nun in zwei Teiläste für $x < 0$ bzw. $x \geq 0$ geteilt und für beide Äste werden unterschiedliche Skalenparameter $\sigma_1 > 0$ und $\sigma_2 > 0$ eingeführt, so daß sich folgende Funktion ergibt:

$$f(x | \sigma_1, \sigma_2) = \frac{2}{\sigma_1 + \sigma_2} \left[f\left(\frac{x}{\sigma_1}\right) I_{(-\infty; 0)}(x) + f\left(\frac{x}{\sigma_2}\right) I_{(0; \infty)}(x) \right].$$

Lemma:

Handelt es sich bei $f(x)$ um eine Dichtefunktion, so erfüllt auch $f(x | \sigma_1, \sigma_2)$ die Bedingungen einer Dichtefunktion.

Beweis:

1. Da σ_1 und σ_2 definitionsgemäß größer null sind, ist $f(x | \sigma_1, \sigma_2)$ stets größer null.

2. Das Integral über $f(x | \sigma_1, \sigma_2)$ errechnet sich zu:

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} f(x | \sigma_1, \sigma_2) dx &= \frac{2}{\sigma_1 + \sigma_2} \left[\int_{-\infty}^0 f\left(\frac{x}{\sigma_1}\right) dx + \int_0^{\infty} f\left(\frac{x}{\sigma_2}\right) dx \right] = \\ \text{Subst.: } y_1 &= \frac{x}{\sigma_1} \rightarrow \frac{dx}{dy_1} = \sigma_1 ; \quad y_2 = \frac{x}{\sigma_2} \rightarrow \frac{dx}{dy_2} = \sigma_2 \\ &= \frac{2}{\sigma_1 + \sigma_2} \left[\sigma_1 \int_{-\infty}^0 f(y_1) dy_1 + \sigma_2 \int_0^{\infty} f(y_2) dy_2 \right] = \\ &= \frac{2}{\sigma_1 + \sigma_2} \left[\sigma_1 \frac{1}{2} + \sigma_2 \frac{1}{2} \right] = 1 \end{aligned}$$

□

Satz:

Sei X eine Zufallsvariable mit Verteilungsfunktion $F(x | \sigma_1, \sigma_2)$ und $F'(x | \sigma_1, \sigma_2) = f(x | \sigma_1, \sigma_2)$ und $f(x | \sigma_1, \sigma_2)$ unimodal mit Maximum am Punkt $x = 0$, sowie $f(x | \sigma_1, \sigma_2) > 0$ für $x \in [a, b] \subseteq \mathfrak{R}$, dann ist $f(x | \sigma_1, \sigma_2)$ rechtsschief, falls $\sigma_1 < \sigma_2$.

Beweis:

Nach Definition 1a muß für eine rechtsschiefe Funktion gelten, daß $F_x(x_{0,5} + a) \leq 1 - F_x(x_{0,5} - a)$ für alle $a \geq 0$ und $F_x(x_{0,5} + a) < 1 - F_x(x_{0,5} - a)$ für mindestens ein $a \geq 0$.

Die Verteilungsfunktion der obigen Dichtefunktion lautet:

$$\begin{aligned} F(x | \sigma_1, \sigma_2) &= \\ &= \frac{2}{\sigma_1 + \sigma_2} \begin{cases} \int_{-\infty}^x f\left(\frac{y}{\sigma_1}\right) dy = \sigma_1 F(x) & \text{für } x \leq 0 \\ \frac{\sigma_1}{2} + \int_0^x f\left(\frac{y}{\sigma_2}\right) dy = \frac{\sigma_1}{2} + \sigma_2 \left[F(x) - \frac{1}{2} \right] = \left(\frac{\sigma_1}{2} - \frac{\sigma_2}{2} \right) + \sigma_2 [F(x)] & \text{für } x > 0. \end{cases} \end{aligned}$$

Annahmegemäß gilt $\sigma_1 < \sigma_2$. Daraus ergibt sich

$$F(x=0 | \sigma_1, \sigma_2) = \frac{2}{c_1 + c_2} \sigma_1 \frac{1}{2} = \frac{\sigma_1}{c_1 + c_2} < \frac{1}{2},$$

wodurch $x_{0,5} > 0$, da Flächeninhalt bis $x = 0$ kleiner ist als 0,5.

Es sind folgende Fälle zu unterscheiden:

1. $x_{0,5} + a \geq 0$ und $x_{0,5} - a \geq 0$

Aufgrund der Unimodalität von $f(x)$ folgt, daß die Verteilungsfunktion $F(x)$ an beiden Stellen strikt konkav ist.. Die Definition für eine strikt konkave Funktion $F(x)$ lautet allgemein:

$$\alpha F(y) + (1 - \alpha)F(z) < F(\alpha y + (1 - \alpha)z) \text{ für } 0 \leq \alpha \leq 1.$$

Setzt man nun $\alpha=0.5$, $y = x_{0,5} - a$ und $z = x_{0,5} + a$, so erhält man

$$\frac{1}{2} F(x_{0,5} - a) + \frac{1}{2} F(x_{0,5} + a) < F\left(\frac{1}{2}(x_{0,5} - a) + \frac{1}{2}(x_{0,5} + a)\right)$$

bzw.

$$F(x_{0,5} - a) + F(x_{0,5} + a) < 2 F\left(\frac{x_{0,5} - a + x_{0,5} + a}{2}\right) = 2 F(x_{0,5}) = F(x_{0,5}) + F(x_{0,5}).$$

Erweitert man beide Seiten geeignet, so erhält man:

$$\frac{2}{\sigma_1 + \sigma_2} \left(\left(\frac{\sigma_1}{2} - \frac{\sigma_2}{2} \right) + \sigma_2 F(x_{0,5} - a) + \left(\frac{\sigma_1}{2} - \frac{\sigma_2}{2} \right) + \sigma_2 F(x_{0,5} + a) \right) < \frac{2}{\sigma_1 + \sigma_2} \left(\left(\frac{\sigma_1}{2} - \frac{\sigma_2}{2} \right) + \sigma_2 F(x_{0,5}) + \left(\frac{\sigma_1}{2} - \frac{\sigma_2}{2} \right) + \sigma_2 F(x_{0,5}) \right)$$

Vergleicht man dies mit der Verteilungsfunktion der schiefen Verteilung, so läßt sich obige Ungleichung umformen zu:

$$F_x(x_{0,5} - a | \sigma_1, \sigma_2) + F_x(x_{0,5} + a | \sigma_1, \sigma_2) < F_x(x_{0,5} | \sigma_1, \sigma_2) + F_x(x_{0,5} | \sigma_1, \sigma_2).$$

Da die Verteilungsfunktion an der Stelle des Median immer gleich 0,5 folgt daraus:

$$F_x(x_{0,5} - a | \sigma_1, \sigma_2) + F_x(x_{0,5} + a | \sigma_1, \sigma_2) < 1$$

bzw.

$$F_x(x_{0,5} + a | \sigma_1, \sigma_2) < 1 - F_x(x_{0,5} - a | \sigma_1, \sigma_2),$$

womit die Definition für eine rechtsschiefe Verteilung für den ersten Fall erfüllt ist.

2. $x_{0,5} + a \geq 0$ und $x_{0,5} - a \leq 0$

Aufgrund der Unimodalität von $f(x)$ folgt nach wie vor, daß die Verteilungsfunktion $F(x)$ an der Stelle $x_{0,5} + a$ strikt konkav ist, dagegen ist sie nun für $x_{0,5} - a$ strikt konvex.

Die Definition für eine strikt konvexe Funktion $F(x)$ lautet allgemein:

$$\beta F(m) + (1 - \beta)F(n) > F(\beta m + (1 - \beta)n) \text{ für } 0 \leq \beta \leq 1, \text{ die für } m, n \leq 0 \text{ erfüllt ist.}$$

Ebenso gilt weiterhin die Definition der strikten Konkavität:

$$\alpha F(y) + (1 - \alpha)F(z) < F(\alpha y + (1 - \alpha)z) \text{ für } 0 \leq \alpha \leq 1, \text{ die für } y, z \geq 0 \text{ erfüllt ist.}$$

Setzt man nun $\alpha = \frac{x_{0,5}}{x_{0,5} + a}$, $\beta = \frac{a - x_{0,5}}{a + x_{0,5}}$, $m = -x_{0,5} - a$, $n = 0$, $y = x_{0,5} + a$ und $z = 0$, so

erhält man

$$\frac{a - x_{0,5}}{a + x_{0,5}} F(-x_{0,5} - a) + \left(1 - \frac{a - x_{0,5}}{a + x_{0,5}}\right) F(0) > F\left(\frac{a - x_{0,5}}{a + x_{0,5}}(x_{0,5} + a) + \left(1 - \frac{a - x_{0,5}}{a + x_{0,5}}\right)0\right) = F(x_{0,5} - a)$$

sowie

$$\frac{x_{0,5}}{x_{0,5} + a} F(x_{0,5} + a) + \left(1 - \frac{x_{0,5}}{x_{0,5} + a}\right) F(0) < F\left(\frac{x_{0,5}}{x_{0,5} + a}(x_{0,5} + a) + \left(1 - \frac{x_{0,5}}{x_{0,5} + a}\right)0\right) = F(x_{0,5}).$$

Außerdem gilt aufgrund der Symmetrie der Dichtefunktion um Null

$$F(-x_{0,5} - a) = 1 - F(x_{0,5} + a) \text{ und } F(0) = \frac{1}{2}$$

und somit

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \left[\frac{a - x_{0,5}}{a + x_{0,5}} F(-x_{0,5} - a) + \left(1 - \frac{a - x_{0,5}}{a + x_{0,5}}\right) F(0) \right] + \frac{1}{2} F(x_{0,5} + a) = \\ & = \frac{1}{2} \left[\frac{a - x_{0,5}}{a + x_{0,5}} (1 - F(x_{0,5} + a)) + \left(1 - \frac{a - x_{0,5}}{a + x_{0,5}}\right) F(0) \right] + \frac{1}{2} F(x_{0,5} + a) = \\ & = \frac{1}{2} \frac{a - x_{0,5}}{a + x_{0,5}} - \frac{1}{2} \frac{a - x_{0,5}}{a + x_{0,5}} F(x_{0,5} + a) + \frac{1}{2} F(x_{0,5} + a) + \frac{1}{2} \left(1 - \frac{a - x_{0,5}}{a + x_{0,5}}\right) F(0) = \\ & = F(0) \frac{a - x_{0,5}}{a + x_{0,5}} + \frac{-(a - x_{0,5}) + a + x_{0,5}}{2(a + x_{0,5})} F(x_{0,5} + a) + \frac{a + x_{0,5} - (a - x_{0,5})}{2(a + x_{0,5})} F(0) = \\ & = \frac{2x_{0,5}}{2(a + x_{0,5})} F(x_{0,5} + a) + \frac{2(a - x_{0,5}) + 2x_{0,5}}{2(a + x_{0,5})} F(0) = \\ & = \frac{x_{0,5}}{a + x_{0,5}} F(x_{0,5} + a) + \frac{a}{a + x_{0,5}} F(0) = \\ & = \frac{x_{0,5}}{x_{0,5} + a} F(x_{0,5} + a) + \left(1 - \frac{x_{0,5}}{x_{0,5} + a}\right) F(0) \end{aligned}$$

also

$$\frac{1}{2} \left[\frac{x_{0,5}}{x_{0,5} + a} F(-x_{0,5} - a) + \left(1 - \frac{x_{0,5}}{x_{0,5} + a}\right) F(0) \right] + \frac{1}{2} F(x_{0,5} + a) = \frac{x_{0,5} - a}{x_{0,5} + a} F(x_{0,5} + a) + \left(1 - \frac{x_{0,5} - a}{x_{0,5} + a}\right) F(0)$$

Setzt man die obigen Ungleichungen ein, so folgt daraus:

$$\frac{1}{2} F(x_{0,5} - a) + \frac{1}{2} F(x_{0,5} + a) < F(x_{0,5})$$

bzw.

$$F(x_{0,5} - a) + F(x_{0,5} + a) < 2F(x_{0,5}).$$

Die weitere Beweisführung erfolgt analog der Darstellung im ersten Teil der Fallunterscheidung, womit für alle $a \geq 0$ gilt:

$$F_x(x_{0,5} + a) < 1 - F_x(x_{0,5} - a).$$

Somit ist die Funktion $f(x | \sigma_1, \sigma_2)$ rechtsschief für $\sigma_1 < \sigma_2$.

□

Mit der analogen Beweisführung kann gezeigt werden, daß $f(x | \sigma_1, \sigma_2)$ für $\sigma_1 > \sigma_2$ linksschief ist.

Lemma:

Die Momente der Funktion $f(x | \sigma_1, \sigma_2)$ lassen sich folgendermaßen angeben:

$$E(x^r | \sigma_1, \sigma_2) = E_+(x^r) \frac{2}{c_1 + c_2} [(-1)^r \sigma_1^{r+1} + \sigma_2^{r+1}],$$

wobei $E(x^r | \sigma_1, \sigma_2)$ das r-te Moment der schiefen, sowie

$$E_+(x^r) = \int_0^{\infty} x^r f(x) dx$$

das positive r-te Moment der zugehörigen symmetrischen Verteilung bezeichnet.

Beweis:

$$\begin{aligned}
E(x^r | \sigma_1, \sigma_2) &= \int_{-\infty}^{\infty} x^r f(x | \sigma_1, \sigma_2) dx = \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} x^r \frac{2}{\sigma_1 + \sigma_2} \left[f\left(\frac{x}{\sigma_1}\right) I_{(-\infty; 0)}(x) + f\left(\frac{x}{\sigma_2}\right) I_{(0; \infty)}(x) \right] dx = \\
&= \frac{2}{\sigma_1 + \sigma_2} \left[\int_{-\infty}^0 x^r f\left(\frac{x}{\sigma_1}\right) dx + \int_0^{\infty} x^r f\left(\frac{x}{\sigma_2}\right) dx \right] = \\
\text{Subst.: } y_1 &= \frac{x}{\sigma_1} \rightarrow \frac{dx}{dy_1} = \sigma_1 ; x^r = \sigma_1^r y_1^r ; \\
y_2 &= \frac{x}{\sigma_2} \rightarrow \frac{dx}{dy_2} = \sigma_2 ; x^r = \sigma_2^r y_2^r ; \\
&= \frac{2}{\sigma_1 + \sigma_2} \left[\int_{-\infty}^0 \sigma_1^r y_1^r f(y_1) \sigma_1 dy_1 + \int_0^{\infty} \sigma_2^r y_2^r f(y_2) \sigma_2 dy_2 \right] = \\
&= \frac{2}{\sigma_1 + \sigma_2} \left[\sigma_1^{r+1} \int_{-\infty}^0 y_1^r f(y_1) dy_1 + \sigma_2^{r+1} \int_0^{\infty} y_2^r f(y_2) dy_2 \right] = \\
&= \frac{2}{\sigma_1 + \sigma_2} \left[\sigma_1^{r+1} (-1)^r \int_0^{\infty} y_1^r f(y_1) dy_1 + \sigma_2^{r+1} \int_0^{\infty} y_2^r f(y_2) dy_2 \right] = \\
&= \frac{2}{\sigma_1 + \sigma_2} \left[\sigma_1^{r+1} (-1)^r E_+(x^r) + \sigma_2^{r+1} E_+(x^r) \right] = \\
&= E_+(x^r) \frac{2}{\sigma_1 + \sigma_2} \left[(-1)^r \sigma_1^{r+1} + \sigma_2^{r+1} \right]
\end{aligned}$$

□

Ist nun sowohl σ_1 bzw. σ_2 von einem weiteren Parameter γ abhängig, so ergibt sich:

$$f(x | \gamma) = \frac{2}{\sigma_1(\gamma) + \sigma_2(\gamma)} \left[f\left(\frac{x}{\sigma_1(\gamma)}\right) I_{(-\infty; 0)}(x) + f\left(\frac{x}{\sigma_2(\gamma)}\right) I_{(0; \infty)}(x) \right].$$

Die Funktion ist nun für alle Werte von γ rechtsschief (linksschief), für die $\sigma_1(\gamma)$ kleiner (größer) ist als $\sigma_2(\gamma)$. Diese Darstellungsweise hat den Vorteil, daß ein einziger Parameter die Schiefe der Funktion steuert.

3 Eine Klasse von Skewed-Generalized-t- (GSGT)-Verteilungen

3.1 Die Skewed-Generalized-t (SGT) -Verteilung

Die SGT-Verteilung wurde 1998 von Theodosiou entwickelt. Ihre Dichtefunktion hat folgendes Aussehen:

$$f(x|\gamma, \sigma, p, q) = \frac{p \sqrt{B\left(\frac{3}{p}, \frac{2q-2}{p}\right)} \sqrt{S(\gamma)}}{2\sigma \sqrt{B\left(\frac{1}{p}, \frac{2q}{p}\right)}^3} \cdot \begin{cases} \left(1 + \frac{|x \sqrt{S(\gamma)}|^p}{\sigma(1+\gamma)} \frac{\sqrt{B\left(\frac{3}{p}, \frac{2q-2}{p}\right)}^p}{\sqrt{B\left(\frac{1}{p}, \frac{2q}{p}\right)}}\right)^{-\left(\frac{2q+1}{p}\right)} & \text{für } x \geq 0 \\ \left(1 + \frac{|x \sqrt{S(\gamma)}|^p}{\sigma(1-\gamma)} \frac{\sqrt{B\left(\frac{3}{p}, \frac{2q-2}{p}\right)}^p}{\sqrt{B\left(\frac{1}{p}, \frac{2q}{p}\right)}}\right)^{-\left(\frac{2q+1}{p}\right)} & \text{für } x < 0 \end{cases}$$

mit

$$S(\gamma) = 1 + 3\gamma^2 \frac{4\gamma^2 B\left(\frac{2}{p}, \frac{2q-1}{p}\right)^2}{B\left(\frac{1}{p}, \frac{2q}{p}\right) B\left(\frac{3}{p}, \frac{2q-2}{p}\right)}$$

Sie kann als Spezialfall der obigen, allgemeinen Darstellung zur Entwicklung schiefer Verteilungen in Abhängigkeit eines Schiefeparameters – und der Parameter p und q, die bezüglich der Zufallsvariable x ebenfalls konstant sind – gesehen werden, wenn man die Funktion

$$\sigma_1(\gamma) = \frac{1-\gamma}{\sqrt{S(\gamma)}}$$

und die Funktion

$$\sigma_2(\gamma) = \frac{1+\gamma}{\sqrt{S(\gamma)}}$$

setzt. So lange γ positiv ist, gilt $\sigma_1(\gamma) < \sigma_2(\gamma)$, wodurch die SGT-Verteilung rechtsschief wird. Für γ negativ wird die Verteilung linksschief ($\sigma_1(\gamma) > \sigma_2(\gamma)$). Bei $\gamma=0$ liegt Symmetrie vor. γ ist dabei im Bereich von $-1 < \gamma < +1$ definiert, so daß $\sigma_1(\gamma) > 0$ und $\sigma_2(\gamma) > 0$ gilt.

Für $\gamma=0$ ergibt sich eine (symmetrische) GT-Verteilung, die leicht von der bei McDonald/Newey (1988) vorgestellten abweicht. Weitere Verteilungen, die in der SGT-Verteilung enthalten sind, sind für:

- $\gamma=0$ und $p=2$: die t-Verteilung mit $2q$ -Freiheitsgraden
- $\gamma=0$, $p=2$ und $q \rightarrow \infty$: die Normalverteilung
- $\gamma=0$, $p=1$ und $q \rightarrow \infty$: die Laplace- oder Doppelte Exponentialverteilung
- $\gamma=0$ und $q \rightarrow \infty$: die Box-Tiao-Verteilung
- $\gamma=0$, $p=2$ und $q=0.5$: die Cauchy-Verteilung

Die Momente der SGT-Verteilung ergeben sich mit:

$$E(x^r | \gamma) = 0.5 \sigma^r \frac{B\left(\frac{1+r}{p}, \frac{2q-r}{p}\right)}{B\left(\frac{3}{p}, \frac{2q-2}{p}\right)^{\frac{r}{2}}} B\left(\frac{1}{p}, \frac{2q}{p}\right)^{-1+\frac{r}{2}} \frac{(-1)^r (1-\gamma)^{r+1} + (1+\gamma)^{r+1}}{\sqrt{S(\gamma)}^r} \cdot 1$$

Das r -te Moment existiert für $pq > r$.

3.2 Die Skewed-Generalized-t-of-the-second-kind- (SGT2) -Verteilung

Die SGT2-Verteilung ergibt sich analog der Bildung der Skewed-Exponential-Power-Verteilung ausgehend von der Box-Tiao-Verteilung, wie sie Fernandez/Osiewalski/Steel (1995) einführen. Fernandez/Steel (1998) entwickelten daraus ein allgemeines Bildungsgesetz

¹ Vgl. Theodossiou, S.1651.

für asymmetrische Verteilungen, das wiederum ein Spezialfall des hier vorgestellten Vorschlages darstellt, wenn man $\sigma_1(\gamma) = 1/\gamma$ und $\sigma_2(\gamma) = 1/\sigma_1(\gamma) = \gamma$ ($\gamma > 0$) setzt.

Die SGT2-Verteilung besitzt die folgende Dichtefunktion:

$$f(x|\gamma, \sigma, p, q) = \frac{p}{\sigma q^{1/p} B\left(\frac{1}{p}, q\right) \left(\gamma + \frac{1}{\gamma}\right)} \begin{cases} \left(1 + \frac{(x)^p}{q \cdot (\sigma \gamma)^p}\right)^{-\left(q + \frac{1}{p}\right)} & \text{für } x \geq 0 \\ \left(1 + \frac{(-\gamma x)^p}{q \cdot \sigma^p}\right)^{-\left(q + \frac{1}{p}\right)} & \text{für } x < 0 \end{cases}$$

Die SGT2-Verteilung ist für $\gamma=1$ symmetrisch, für $\gamma>1$ rechtsschief ($\sigma_1(\gamma) < \sigma_2(\gamma)$) und für $\gamma<1$ linksschief ($\sigma_1(\gamma) > \sigma_2(\gamma)$). Die Parameter p und q beeinflussen die Kurtosis. Je kleiner ihre Werte sind, desto leptokurtischer ist die Verteilung.

In Anlehnung an Butler/McDonald/Nelson/White (1990) kann ausgehend von der SGT2-Verteilung der nachfolgende Verteilungsbaum abgeleitet werden:

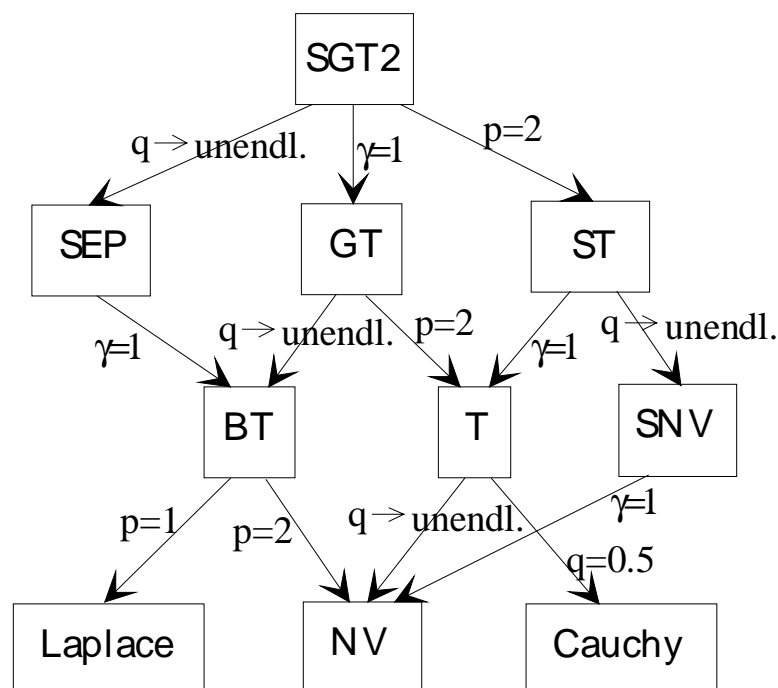


Abb.1: Verteilungsbaum mit der SGT2- als Ausgangsverteilung

Die SGT2-Verteilung besitzt keine Momenterzeugende Funktion, die Momente lassen sich jedoch ebenfalls allgemein ableiten.

Lemma:

$$E(x^r | \gamma) = \sigma^r q^{(r/p)} \frac{B\left(\frac{1+r}{p}, q - \frac{r}{p}\right)}{B\left(\frac{1}{p}, q\right)} \frac{\gamma^{r+1} + (-1)^r \gamma^{-r-1}}{\gamma + \frac{1}{\gamma}} \text{ für } pq > r.$$

Beweis:

Zunächst soll der Zusammenhang zwischen $E(x^r)$ und $E_+(x^r)$ für um $x = 0$ symmetrische Verteilungen aufgezeigt werden. Es gilt:

$$E(x^r) = E_-(x^r) + E_+(x^r) = \int_{-\infty}^0 x^r f(x) dx + \int_0^{\infty} x^r f(x) dx = (-1)^r \int_0^{\infty} x^r f(x) dx + \int_0^{\infty} x^r f(x) dx$$

Somit gilt für r gerade:

$$E(x^r) = 2 \int_0^{\infty} x^r f(x) dx = 2 E_+(x^r)$$

Für die GT-Verteilung ergibt sich für r gerade:

$$E_+(x^r) = \frac{1}{2} E(x^r) = \frac{1}{2} \sigma^r q^{(r/p)} \frac{B\left(\frac{1+r}{p}, q - \frac{r}{p}\right)}{B\left(\frac{1}{p}, q\right)}$$

Da der positive Partialerwartungswert für r gerade und ungerade identisch ist, gilt dieses Ergebnis auch für r ungerade.

Somit läßt sich der Erwartungswert $E(x^r|\gamma)$ für alle r ganzzahlig bestimmen als:

$$\begin{aligned} E(x^r|\gamma) &= E_+(x^r) \frac{2}{\sigma_1(\gamma) + \sigma_2(\gamma)} \left[(-1)^r \sigma_1(\gamma)^{r+1} + \sigma_2(\gamma)^{r+1} \right] = \\ &= \frac{1}{2} \sigma^r q^{(r/p)} \frac{B\left(\frac{1+r}{p}, q - \frac{r}{p}\right)}{B\left(\frac{1}{p}, q\right)} \frac{2}{\frac{1}{\gamma} + \gamma} \left[(-1)^r \left(\frac{1}{\gamma}\right)^{r+1} + \gamma^{r+1} \right] = \\ &= \sigma^r q^{(r/p)} \frac{B\left(\frac{1+r}{p}, q - \frac{r}{p}\right)}{B\left(\frac{1}{p}, q\right)} \frac{\gamma^{r+1} + (-1)^r \gamma^{-r-1}}{\gamma + \frac{1}{\gamma}} \end{aligned}$$

□

Das standardisierte dritte Moment, das als Maß für die Schiefe der Verteilung dienen soll, läßt sich mittels der Formel

$$\frac{E(x - \mu)^3}{c^3} = \frac{E(x^3) - 3\mu\sigma^2 - \mu^3}{c^3},$$

das standardisierte vierte Moment als Maß für die Kurtosis mit

$$\frac{E(x - \mu)^4}{c^4} = \frac{E(x^4) - 4\mu m_3 - 6\mu^2 \sigma^2 - \mu^4}{c^4}$$

berechnen, wobei

$$\mu \equiv E(x)$$

und

$$c^2 = E(x^2) - (E(x))^2.$$

Für verschiedene Parameterkombinationen ergeben sich die folgenden Schiefen:

p \ q	3	4	5	6	8	∞
1	-	1.6207	1.0327	0.8301	0.6634	0.3989
1.25	1.4400	0.7502	0.5822	0.5050	0.4314	0.2920
1.5	0.7023	0.4743	0.3950	0.3543	0.3128	0.2263
1.75	0.4548	0.3396	0.2932	0.2680	0.2412	0.1823
2	0.3303	0.2602	0.2296	0.2124	0.1937	0.1508
2.5	0.2058	0.1714	0.1551	0.1456	0.1349	0.1093
3	0.1443	0.1237	0.1136	0.1075	0.1006	0.0836

Tab. 1: Standardisiertes drittes Moment der SGT2-Verteilung bei $\gamma=1.1$

p \ q	3	4	5	6	8	∞
1	-	2.9586	1.8908	1.5227	1.2194	0.7371
1.25	2.6432	1.3821	1.0745	0.9332	0.7983	0.5421
1.5	1.2984	0.8790	0.7329	0.6580	0.5814	0.4217
1.75	0.8449	0.6320	0.5461	0.4994	0.4499	0.3405
2	0.6158	0.4857	0.4288	0.3968	0.3621	0.2824
2.5	0.3855	0.3213	0.2909	0.2731	0.2532	0.2053
3	0.2710	0.2325	0.2135	0.2021	0.1892	0.1572

Tab. 2: Standardisiertes drittes Moment der SGT2-Verteilung bei $\gamma=1.2$

p \ q	3	4	5	6	8	∞
1	-	-1.7844	-1.1373	-0.9144	-0.7309	-0.4397
1.25	-1.5862	-0.8267	-0.6416	-0.5566	-0.4756	-0.3219
1.5	-0.7741	-0.5229	-0.4355	-0.3907	-0.3449	-0.2497
1.75	-0.5015	-0.3745	-0.3233	-0.2956	-0.2661	-0.2011
2	-0.3643	-0.2870	-0.2532	-0.2343	-0.2137	-0.1664
2.5	-0.2271	-0.1892	-0.1712	-0.1607	-0.1207	-0.1489
3	-0.1592	-0.1366	-0.1254	-0.1187	-0.1111	-0.0922

Tab. 3: Standardisiertes drittes Moment der SGT2-Verteilung bei $\gamma=0.9$

p \ q	3	4	5	6	8	∞
1	-	-3.5130	-2.2491	-1.8133	-1.4540	-0.8818
1.25	-3.1493	-1.6504	-1.2846	-1.1165	-0.9559	-0.6505
1.5	-1.5540	-1.0536	-0.8792	-0.7897	-0.6982	-0.5072
1.75	-1.0144	-0.7595	-0.6566	-0.6007	-0.5414	-0.4103
2	-0.7410	-0.5848	-0.5166	-0.4782	-0.4364	-0.3406
2.5	-0.4652	-0.3880	-0.3513	-0.3298	-0.3058	-0.2481
3	-0.3277	-0.2812	-0.2582	-0.2445	-0.2289	-0.1902

Tab. 4: Standardisiertes drittes Moment der SGT2-Verteilung bei $\gamma=0.8$

² Vgl. Theodossiou, S.1651.

Für $\gamma > 1$ ergibt sich wie erwartet eine rechtsschiefe, für $\gamma < 1$ eine linksschiefe Verteilung. Je weiter γ von eins entfernt ist, um so schief ist die Verteilung. Eine Variation von γ um $\pm 0,1$ führt dazu, daß die entsprechende Verteilung für $\gamma = 0,9$ stärker linksschief ist, als sie für $\gamma = 1,1$ rechtsschief ist.

Auch die Parameter p und q , die im wesentlichen die Kurtosis steuern, haben Einfluß auf die Schiefe. Dabei gilt, daß eine Verteilung bei gleichem γ um so schief ist, je leptokurtischer die Verteilung (also je kleiner p und q) ist. Ein analoges Ergebnis erhielt bereits Theodossiou. Für $p=2$ ergeben sich bei unterschiedlichem γ die standardisierten dritten Momente einer schiefen t-Verteilung bei $2q$ Freiheitsgraden, für $p=2$ und $q \rightarrow \infty$ die standardisierten dritten Momente einer schiefen Normalverteilung.³

Für die Kurtosis erhält man folgende Ergebnisse:

Die erste Übersicht zeigt die Kurtosis bei $\gamma=1$, also die Kurtosis der GT-Verteilung.

$p \setminus q$	3	4	5	6	8	∞
1	-	-	36.0000	20.0000	12.6000	6.0000
1.25	-	20.4954	11.3863	8.8648	7.0172	4.5273
1.5	24.7329	8.9039	6.6779	5.7949	5.0272	3.7620
1.75	9.3820	5.8291	4.8964	4.4665	4.0586	3.3026
2	6.0000	4.5000	4.0000	3.7500	3.5000	3.0000
2.5	3.8461	3.3375	3.1289	3.0154	2.8950	2.6312
3	3.0801	2.8286	2.7155	2.6512	2.5809	2.4184

Tab. 5: Standardisiertes viertes Moment der SGT2-Verteilung bei $\gamma=1$

Auch in dieser Tabelle wird sichtbar, daß die GT-Verteilung als Spezialfälle die t-Verteilung (für $p=2$) und die Normalverteilung (für $p=2$ und $q \rightarrow \infty$) enthält.

³ Vgl. Fernandez/Steel (1998).

p \ q	3	4	5	6	8	∞
1	-	-	38.0882	21.1308	13.2774	6.2467
1.25	-	21.6356	11.9399	9.2512	7.2772	4.6034
1.5	26.1224	9.2379	6.8587	5.9130	5.0892	3.7257
1.75	9.7010	5.9048	4.9069	4.4463	4.0088	3.1966
2	6.0528	4.4527	3.9194	3.6529	3.3864	2.8544
2.5	3.7263	3.1917	2.9736	2.8553	2.7302	2.4584
3	2.9188	2.6613	2.5466	2.4818	2.4113	2.2505

Tab. 6: Standardisiertes viertes Moment der SGT2-Verteilung bei $\gamma=1.1$

p \ q	3	4	5	6	8	∞
1	-	-	43.0941	23.8644	14.9317	6.8690
1.25	-	24.4368	13.3232	10.2291	7.9476	4.8231
1.5	29.5743	10.1064	7.3493	6.2484	5.2849	3.6744
1.75	10.5482	6.1451	4.9823	4.4439	3.9309	2.9734
2	6.2433	4.3874	3.7681	3.4582	3.1484	2.5304
2.5	3.4779	2.8723	2.6273	2.4952	2.3564	2.0593
3	2.5551	2.2782	2.1571	2.0896	2.0170	1.8563

Tab. 7: Standardisiertes viertes Moment der SGT2-Verteilung bei $\gamma=1.2$

p \ q	3	4	5	6	8	∞
1	-	-	38.5356	21.3738	13.4234	6.3005
1.25	-	21.8820	12.0602	9.3356	7.3344	4.6208
1.5	26.4239	9.3115	6.8991	5.9399	5.1039	3.7190
1.75	9.7718	5.9228	4.9106	4.4434	3.9994	3.1748
2	6.0661	4.4440	3.9034	3.6332	3.3631	2.8239
2.5	3.7018	3.1614	2.9411	2.8216	2.6955	2.4218
3	2.8848	2.6260	2.5108	2.4459	2.3753	2.2147

Tab. 8: Standardisiertes viertes Moment der SGT2-Verteilung bei $\gamma=0.9$

p \ q	3	4	5	6	8	∞
1			46.1222	25.5345	15.9547	7.2689
1.25		26.1811	14.2016	10.8591	8.3884	4.9845
1.5	31.7524	10.6829	7.6896	6.4911	5.4396	3.6716
1.75	11.1236	6.3356	5.0672	4.4786	3.9165	2.8634
2	6.4082	4.3859	3.7098	3.3711	3.0321	2.3554
2.5	3.3591	2.7040	2.4397	2.2975	2.1484	1.8314
3	2.3549	2.0622	1.9353	1.8650	1.7899	1.6262

Tab. 9: Standardisiertes viertes Moment der SGT2-Verteilung bei $\gamma=0.8$

Es zeigt sich, daß neben den Parameter p und q auch γ einen Einfluß auf die Kurtosis hat. Je schiefer die Verteilung (d. h. je weiter γ von eins entfernt), um so leptokurtischer ist die Verteilung. Auch dieses Resultat ist identisch zu den Ausführungen von Theodossiou.

Führt man eine Umparametrisierung durch und setzt $\sigma_1(\gamma) = \exp(-\gamma)$ und $\sigma_2(\gamma) = \exp(\gamma)$, so erhält man die folgende Dichtefunktion:

$$f(x | \sigma, p, q) = \frac{p}{\sigma q^{1/p} B\left(\frac{1}{p}, q\right) (e^{-\gamma} + e^{\gamma})} \begin{cases} \frac{1}{\left(1 + \frac{(x)^p}{q \cdot (\sigma e^{\gamma})^p}\right)^{\left(q + \frac{1}{p}\right)}} & \text{für } x \geq 0 \\ \frac{1}{\left(1 + \frac{(-x)^p}{q \cdot (\sigma e^{-\gamma})^p}\right)^{\left(q + \frac{1}{p}\right)}} & \text{für } x < 0 \end{cases}$$

und die Erwartungswerte:

$$E(x^r | \gamma) = \sigma^r q^{(r/p)} \frac{B\left(\frac{1+r}{p}, q - \frac{r}{p}\right) e^{\gamma(r+1)} + (-1)^r e^{-\gamma(r+1)}}{B\left(\frac{1}{p}, q\right) (e^{-\gamma} + e^{\gamma})}.$$

Diese Vorgehensweise hat einige Vorteile. Zum einen ergibt sich nun für $\gamma=0$ (und nicht mehr für $\gamma=1$) eine symmetrische (GT-) Verteilung, zum anderen erhält man für ein beliebiges $\gamma>0$ eine rechtsschiefe Verteilung, für $-\gamma$ eine linksschiefe Verteilung gleicher Stärke. Zudem ist γ nun für alle reellen Zahlen definiert. Obige Tabellen für die Schiefe und Kurtosis der SGT2-Verteilung errechnen sich bei dieser Vorgehensweise nun mit $\gamma = -0,2231$ (statt $\gamma = 0.8$), $\gamma = -0.1054$ (statt $\gamma = 0.9$), $\gamma = 0$ (statt $\gamma = 1$), $\gamma = 0.0953$ (statt $\gamma = 1.1$) und $\gamma = 0.1823$ (statt $\gamma = 1.2$).

3.3 Die Skewed-Generalized-t-of-the-third-kind- (SGT3) -Verteilung

Abschließend soll ein weiterer Vorschlag für eine einfache schiefe Verteilung gemacht werden. Setzt man $\sigma_1(\gamma) = 1-\gamma$ und $\sigma_2(\gamma) = 2-\sigma_1(\gamma) = 1+\gamma$ ($-1 < \gamma < +1$), so erhält man:

$$f(x; \sigma, p, q, \gamma) = \frac{p}{2 \sigma q^{1/p} B\left(\frac{1}{p}, q\right)} \begin{cases} \frac{1}{\left(1 + \frac{(x)^p}{q \cdot (\sigma(1+\gamma))^p}\right)^{\left(q + \frac{1}{p}\right)}} & \text{für } x \geq 0 \\ \frac{1}{\left(1 + \frac{(-x)^p}{q \cdot (\sigma(1-\gamma))^p}\right)^{\left(q + \frac{1}{p}\right)}} & \text{für } x < 0 \end{cases}$$

und

$$E(x^r | \gamma) = \sigma^r q^{\left(\frac{r}{p}\right)} \frac{B\left(\frac{1+r}{p}, q - \frac{r}{p}\right) (1+\gamma)^{r+1} + (-1)^r (1-\gamma)^{-r-1}}{B\left(\frac{1}{p}, q\right) \cdot 2}.$$

Da sich nun - wie bei der SGT2-Verteilung nach Umparametrisierung – bei $-\gamma$ -Werten eine gleich starke Schiefe wie bei gleichem $+\gamma$ – allerdings bei umgekehrtem Vorzeichen – ergibt, müssen nur noch die Tabellen für $\gamma > 0$ angegeben werden. Die Kurtosis ist für $-\gamma$ und γ identisch. Für $\gamma=0$ erhält man die gleichen Werte für die Kurtosis wie bei der SGT2-Verteilung.

p \ q	3	4	5	6	8	∞
1	-	1.7028	1.0851	0.8724	0.6972	0.4194
1.25	1.5133	0.7886	0.6119	0.5309	0.4535	0.3070
1.5	0.7383	0.4986	0.4152	0.3725	0.3289	0.2380
1.75	0.4782	0.3571	0.3083	0.2818	0.2537	0.1917
2	0.3473	0.2736	0.2414	0.2233	0.2037	0.1586
2.5	0.2165	0.1803	0.1632	0.1531	0.1419	0.1150
3	0.1517	0.1302	0.1195	0.1131	0.1058	0.0879

Tab. 10: Standardisiertes drittes Moment der SGT3-Verteilung bei $\gamma=0.1$

Für $\gamma=0.1$ liegt die Schiefe der SGT3-Verteilung zwischen den Absolutbeträgen der Schiefe bei $\gamma=0.9$ bzw. $\gamma=1.1$ der SGT2-Verteilung.

Ähnliches gilt auch für $\gamma=0.2$, hier liegt die Schiefe der SGT3-Verteilung zwischen den Absolutbeträgen der Schiefe der SGT2-Verteilung für $\gamma=0.8$ bzw. $\gamma=1.2$:

p \ q	3	4	5	6	8	∞
1	-	3.2423	2.0739	1.6711	1.3391	0.8107
1.25	2.9015	1.5188	1.1814	1.0264	0.8784	0.5971
1.5	1.4284	0.9677	0.8072	0.7248	0.6406	0.4651
1.75	0.9309	0.6967	0.6021	0.5507	0.4962	0.3758
2	0.6792	0.5359	0.4732	0.4380	0.3997	0.3118
2.5	0.4258	0.3550	0.3214	0.3017	0.2798	0.2269
3	0.2996	0.2571	0.2360	0.2235	0.2092	0.1739

Tab. 11: Standardisiertes drittes Moment der SGT3-Verteilung bei $\gamma=0.2$

Die Werte für die Kurtosis der SGT3-Verteilung lauten:

p \ q	3	4	5	6	8	∞
1	-	-	38.3061	21.2487	13.3478	6.2717
1.25	-	21.7540	11.9965	9.2902	7.3029	4.6094
1.5	26.2663	9.2705	6.8751	5.9228	5.0930	3.7190
1.75	9.7313	5.9095	4.9046	4.4408	4.0001	3.1819
2	6.0545	4.4438	3.9071	3.6388	3.3706	2.8352
2.5	3.7093	3.1721	2.9530	2.8343	2.7088	2.4363
3	2.8975	2.6397	2.5248	2.4600	2.3896	2.2292

Tab. 12: Standardisiertes viertes Moment der SGT3-Verteilung bei $\gamma=0.1$

p \ q	3	4	5	6	8	∞
1			44.5567	24.6632	15.4137	7.0437
1.25		25.2518	13.7165	10.5010	8.1265	4.8629
1.5	30.5778	10.3348	7.4630	6.3145	5.3078	3.6194
1.75	10.7603	6.1730	4.9596	4.3971	3.8605	2.8571
2	6.2483	4.3147	3.6691	3.3460	3.0228	2.3784
2.5	3.3418	2.7161	2.4636	2.3278	2.1855	1.8825
3	2.3846	2.1040	1.9823	1.9147	1.8425	1.6846

Tab. 13: Standardisiertes viertes Moment der SGT3-Verteilung bei $\gamma=0.2$

Insgesamt erhält man ähnliche Ergebnisse wie für die SGT- und die SGT2-Verteilung. Die Parameter p und q beeinflussen insbesondere, γ die Schiefe, wobei zusätzlich auch eine

(geringe) Beeinflussung der Schiefe durch p und q (bei γ ungleich null) der Kurtosis durch γ gegeben ist.

4 Anwendung auf Finanzmarktdaten

Für die Tagesrenditen der 30 Aktien des Deutschen Aktienindex (DAX) von 1989 bis 1996 wurden die Parameter der Normal-, der GT- und der SGT2-Verteilung mit der Maximum-Likelihood-Methode ermittelt, wobei zusätzlich ein Lokalisationsparameter μ eingeführt wurde.

Neben den Parametern sollen zusätzlich die logarithmierten Likelihoodwerte der Schätzung miteinander verglichen werden und mittels eines Verallgemeinerten Likelihood-Verhältnistests auf Signifikanz der zusätzlichen Parameter getestet werden.

Aktie	μ	σ	Log L
Allianz	0.0006	0.0141	5321.2542
BASF	0.0002	0.0129	5485.9275
Bayer	0.0003	0.0127	5517.7932
Bayerische Hypobank	0.0002	0.0133	5423.1077
Bayerische Vereinsbank	0.0003	0.0143	5298.0660
BMW	0.0004	0.0142	5310.8455
Commerzbank	0.0003	0.0136	5382.0173
Continental	0.0001	0.0171	4952.5047
Daimler	0.0002	0.0149	5216.6031
Degussa	0.0003	0.0154	5152.3626
Deutsche Babcock	0.0001	0.0215	4528.9249
Deutsche Bank	0.0003	0.0125	5546.2495
Dresdner Bank	0.0003	0.0125	5544.2156
Henkel	0.0002	0.0119	5637.5035
Hoechst	0.0003	0.0137	5366.6168
Karstadt	0.0003	0.0147	5242.2946
Kaufhof	0.0003	0.0160	5082.5165
Linde	0.0003	0.0119	5637.9860
Lufthansa	0.0004	0.0197	4695.5002
MAN St.	0.0006	0.0173	4937.9765
Mannesmann	0.0008	0.0173	4940.2965
Metallgesellschaft	0.0001	0.0256	4201.3371
Preussag	0.0007	0.0153	5163.2418
RWE St.	0.0006	0.0138	5359.8229
Schering	0.0005	0.0129	5481.5111
Siemens	0.0004	0.0119	5640.3270
Thyssen	0.0005	0.0161	5068.8633
VEBA	0.0006	0.0130	5465.1444
VIAG	0.0007	0.0139	5349.2992
VW St.	0.0005	0.0170	4973.7377

Tab. 14: Maximum-Likelihood-Schätzung bei angenommener Normalverteilung

	μ	σ	p	q	Log L
Allianz	0.0004	0.0141	1.8748	2.3999	5468.0363
BASF	0.0003	0.0137	2.1115	2.0008	5609.0771
Bayer	0.0002	0.0127	1.8365	2.5022	5647.0664
Bayerische Hypobank	0.0001	0.0133	2.1566	1.7153	5613.9969
Bayerische Vereinsbank	0.0003	0.0135	1.7785	2.4696	5484.9455
BMW	0.0000	0.0136	1.7765	2.4857	5476.0667
Commerzbank	0.0003	0.0127	1.6853	2.8640	5566.9044
Continental	-0.0003	0.0167	1.3958	8.6212	5031.0407
Daimler	0.0001	0.0160	1.9771	2.4966	5325.7413
Degussa	0.0000	0.0134	1.4464	4.2323	5355.1388
Deutsche Babcock	-0.0005	0.0182	1.7656	2.1649	4845.4039
Deutsche Bank	0.0003	0.0132	1.9667	2.4269	5669.5327
Dresdner Bank	0.0003	0.0123	1.9895	1.9278	5708.4190
Henkel	0.0001	0.0121	1.8915	2.6057	5803.4298
Hoechst	0.0002	0.0137	2.0244	1.8903	5516.7737
Karstadt	0.0001	0.0142	1.7359	3.1275	5446.0545
Kaufhof	0.0001	0.0160	1.7468	3.0761	5224.3950
Linde	0.0001	0.0108	1.6914	2.6929	5855.0240
Lufthansa	-0.0001	0.0192	1.6514	3.3118	4821.4193
MAN St.	0.0003	0.0163	1.7691	2.6905	5159.9382
Mannesmann	0.0006	0.0172	2.1523	1.7989	5146.4351
Metallgesellschaft	-0.0003	0.0173	1.6561	1.6273	4646.4065
Preussag	0.0002	0.0145	1.5308	4.0329	5289.4432
RWE St.	0.0002	0.0114	1.6483	2.3209	5638.4396
Schering	0.0004	0.0111	1.4643	3.5649	5657.4209
Siemens	0.0004	0.0131	2.3778	1.7298	5760.4868
Thyssen	0.0005	0.0184	2.3176	1.9464	5157.2493
VEBA	0.0005	0.0123	2.0010	1.7729	5668.7083
VIAG	0.0004	0.0132	2.0934	1.6940	5572.8871
VW St.	0.0006	0.0197	2.2646	2.2229	5061.6549

Tab. 15: Maximum-Likelihood-Schätzung bei angenommener GT-Verteilung

	μ	σ	p	q	γ	Log L
Allianz	-0.0007	0.0140	1.8587	2.4333	1.0701	5471.2872
BASF	-0.0003	0.0136	2.1056	2.0010	1.0358	5610.1281
Bayer	-0.0003	0.0127	1.8297	2.5189	1.0342	5647.9471
Bayern Hyp	-0.0004	0.0132	2.1228	1.7690	1.0362	5614.7586
Bayern Verein	0.0002	0.0135	1.7680	2.5015	1.0096	5485.7727
BMW	-0.0011	0.0134	1.7327	2.6544	1.0826	5479.6455
Commerzbank	0.0001	0.0127	1.6765	2.8968	1.0149	5567.9483
Continental	-0.0017	0.0163	1.3579	9.3989	1.0749	5034.7081
Daimler	-0.0009	0.0159	1.9446	2.5899	1.0583	5327.3754
Degussa	-0.0005	0.0135	1.4852	3.9090	1.0431	5356.2764
Deutsche Babcock	-0.0020	0.0179	1.6806	2.4150	1.0871	4850.2590
Deutsche Bank	0.0000	0.0132	1.9759	2.3983	1.0206	5670.3647
Dresdner Bank	-0.0003	0.0122	1.9780	1.9434	1.0458	5710.0163
Henkel	-0.0001	0.0121	1.9038	2.5727	1.0203	5803.8180
Hoechst	-0.0005	0.0137	2.0709	1.8023	1.0490	5518.1248
Karstadt	-0.0006	0.0142	1.7408	3.1231	1.0521	5447.5882
Kaufhof	-0.0009	0.0161	1.7941	2.8672	1.0577	5226.1462
Linde	-0.0006	0.0108	1.7011	2.6460	1.0640	5857.3610
Lufthansa	-0.0017	0.0193	1.6923	3.0913	1.0848	4824.7964
MAN St.	-0.0004	0.0163	1.7752	2.6824	1.0465	5161.6751
Mannesmann	0.0000	0.0172	2.1398	1.8164	1.0362	5148.9005
Metallgesellschaft	-0.0010	0.0174	1.6907	1.5654	1.0410	4647.7958
Preussag	-0.0010	0.0145	1.5549	3.9006	1.0824	5293.2664
RWE St.	-0.0005	0.0114	1.6839	2.2091	1.0684	5641.5971
Schering	0.0001	0.0111	1.4677	3.5248	1.0302	5659.4841
Siemens	-0.0001	0.0131	2.3723	1.7379	1.0332	5762.1135
Thyssen	-0.0003	0.0183	2.3076	1.9569	1.0385	5158.7743
VEBA	0.0000	0.0122	2.0067	1.7561	1.0420	5671.7386
VIAG	-0.0009	0.0130	2.0091	1.8408	1.0971	5578.1191
VW St.	0.0013	0.0196	2.2597	2.2248	0.9685	5063.5983

Tab. 16: Maximum-Likelihood-Schätzung bei angenommener SGT2-Verteilung

VLVT-Werte:	Vergleich NV-GT-Verteilung	Vergleich GT-SGT2-Verteilung
Allianz	293.5642**	6.5018*
BASF	246.2992**	2.1020
Bayer	258.5464**	1.7614
Bayerische Hypobank	381.7784**	1.5234
Bayerische Vereinsbank	373.7590**	1.6544
BMW	330.4424**	7.1576**
Commerzbank	369.7742**	2.0878
Continental	157.0720**	7.3348**
Daimler	218.2764**	3.2682
Degussa	405.5524**	2.2752
Deutsche Babcock	632.9580**	9.7102**
Deutsche Bank	246.5664**	1.6640
Dresdner Bank	328.4068**	3.1946
Henkel	331.8526**	0.7764
Hoechst	300.3138**	2.7022
Karstadt	407.5198**	3.0674
Kaufhof	283.7570**	3.5024
Linde	434.0760**	4.6740*
Lufthansa	251.8382**	6.7542**
MAN St.	443.9234**	3.4738
Mannesmann	412.2772**	4.9308*
Metallgesellschaft	890.1388**	2.7786
Preussag	252.4028**	7.6464**
RWE St.	557.2334**	6.3150*
Schering	351.8196**	4.1264*
Siemens	240.3196**	3.2534
Thyssen	176.7720**	3.0500
VEBA	407.1278**	6.0606*
VIAG	447.1758**	10.4640**
VW St.	175.8344**	3.8868*

Tab. 17: Verallgemeinerter Likelihoodverhältnistest für die verschiedenen Verteilungen, Signifikanzniveau 5% (*) bzw. 1%(**)

Die gemeinsame Hinzunahme der Parameter p und q – also die Zugrundelegung der GT- statt der Normalverteilung – ist in allen Fällen höchst signifikant, was darauf schließen läßt, daß die Verteilung der Residuen stärker leptokurtisch ist als die Normalverteilung.

Weniger eindeutig ist das Ergebnis, wenn zusätzlich der Parameter γ eingeführt wird. Dennoch liegt in 13 von 30 Fällen eine Signifikanz vor, in sechs Fällen sogar eine deutliche Signifikanz. Zudem fällt auf, daß - mit einer Ausnahme (VW) – bei allen Aktien tendenziell eher eine rechtsschiefe Verteilung vorliegt, da die entsprechenden γ -Werte über eins liegen. Dadurch nimmt der Lokalisationsparameter μ nun in den meisten Fällen einen Wert kleiner

null an. Dies läßt sich durch den Einfluß des Schiefeparameters γ erklären. Für $\gamma > 1$ liegt der Erwartungswert der (rechtsschiefen) Verteilung bei größer null, was durch einen negativen Lokalisationsparameter μ ausgeglichen wird.

Abschließend soll noch die Vermutung überprüft werden, die Signifikanz des Schiefeparameters werde durch einige wenige Ausreißer erzeugt. Dazu wurden aus dem vorliegenden Datenbestand die 10 größten sowie 10 kleinsten Werte entfernt. Für die Normal-, die GT- und die SGT2-Verteilung ergeben sich folgende Schätzungen:

Aktie	μ	σ	Log L
Allianz	0.0006	0.0175	5503.4169
BASF	0.0003	0.0142	5612.2120
Bayer	0.0003	0.0142	5640.3180
Bayerische Hypobank	0.0003	0.0142	5600.8312
Bayerische Vereinsbank	0.0004	0.0174	5514.0599
BMW	0.0005	0.0177	5490.4270
Commerzbank	0.0004	0.0142	5527.4380
Continental	0.0002	0.0223	5058.5693
Daimler	0.0003	0.0189	5367.9851
Degussa	0.0004	0.0189	5364.1061
Deutsche Babcock	0.0002	0.0247	4870.9645
Deutsche Bank	0.0004	0.0142	5685.1619
Dresdner Bank	0.0004	0.0142	5698.9677
Henkel	0.0002	0.0142	5841.5522
Hoechst	0.0004	0.0142	5446.2412
Karstadt	0.0004	0.0177	5481.5400
Kaufhof	0.0004	0.0200	5257.5422
Linde	0.0003	0.0142	5877.3835
Lufthansa	0.0005	0.0249	4849.5408
MAN St.	0.0006	0.0206	5200.6548
Mannesmann	0.0008	0.0206	5199.8366
Metallgesellschaft	0.0001	0.0293	4552.6175
Preussag	0.0007	0.0197	5289.6745
RWE St.	0.0006	0.0140	5599.9670
Schering	0.0006	0.0141	5611.2734
Siemens	0.0005	0.0141	5795.6043
Thyssen	0.0006	0.0205	5210.8962
VEBA	0.0007	0.0140	5651.8790
VIAG	0.0007	0.0140	5529.8729
VW St.	0.0006	0.0215	5121.7948

Tab. 18: Maximum-Likelihood-Schätzung bei angenommener Normalverteilung (ohne 10 Ausreißer)

	μ	σ	p	q	Log L
Allianz	0.0004	0.0138	1.4237	142985.3726	5528.0617
BASF	0.0002	0.0133	1.5004	75199.1089	5665.6268
Bayer	0.0001	0.0123	1.3887	23367.3036	5699.3495
Bayerische Hypobank	0.0000	0.0125	1.3890	75308.9467	5668.0237
Bayerische Vereinsb.	0.0002	0.0130	1.3449	161189.0474	5547.9080
BMW	0.0000	0.0128	1.3126	126057.5357	5530.1327
Commerzbank	0.0003	0.0122	1.3205	80500.3947	5624.4358
Continental	-0.0002	0.0174	1.4121	61339.0122	5081.8008
Daimler	0.0001	0.0158	1.5350	111088.2693	5382.5820
Degussa	0.0000	0.013	1.2508	119810.9029	5409.4870
Deutsche Babcock	-0.0004	0.0173	1.2724	244563.0762	4917.6364
Deutsche Bank	0.0003	0.0129	1.5004	102292.6126	5723.1359
Dresdner Bank	0.0002	0.0116	1.3910	30.1785	5758.1116
Henkel	0.0002	0.012	1.4958	158022.5617	5859.1490
Hoechst	0.0002	0.0132	1.4504	19.1102	5567.3473
Karstadt	0.0001	0.0141	1.4424	110458.8023	5501.7328
Kaufhof	0.0001	0.0157	1.4204	72462.4819	5280.8373
Linde	0.0000	0.0104	1.3114	114743.4178	5914.4382
Lufthansa	0.0000	0.0188	1.3660	127078.2872	4880.0006
MAN St.	0.0004	0.0161	1.4117	143391.8506	5225.2380
Mannesmann	0.0006	0.0168	1.4844	133408.5463	5218.8550
Metallgesellschaft	-0.0001	0.016	1.2115	6.3817	4720.2773
Preussag	0.0002	0.0139	1.2860	72306.3562	5333.0487
RWE St.	0.0002	0.0106	1.1987	189491.4874	5705.6372
Schering	0.0004	0.0106	1.2011	123012.8837	5712.0597
Siemens	0.0004	0.0132	1.6981	24.6944	5811.4679
Thyssen	0.0005	0.0182	1.6532	140402.2153	5218.1337
VEBA	0.0005	0.0115	1.3171	22193.2712	5725.3984
VIAG	0.0003	0.0128	1.4397	22.9145	5630.0446
VW St.	0.0006	0.02	1.7594	18642.9416	5124.8538

Tab. 19: Maximum-Likelihood-Schätzung bei angenommener GT-Verteilung (ohne jeweils 10 Ausreißer)

	μ	σ	p	q	γ	Log L
Allianz	-0.0007	0.0137	1.4224	123157.7995	1.0712	5530.9025
BASF	-0.0003	0.0133	1.4983	84701.7655	1.0354	5666.4710
Bayer	-0.0003	0.0123	1.3883	121966.9246	1.0387	5700.4049
Bayerische Hypobank	-0.0003	0.0125	1.3969	34089.9322	1.0370	5669.0875
Bayerische Vereinsb.	0.0000	0.0129	1.3359	141873.7908	1.0168	5548.2077
BMW	-0.0013	0.0128	1.3269	68142.2164	1.1007	5536.0107
Commerzbank	0.0000	0.0121	1.3125	30453.0043	1.0230	5624.9613
Continental	-0.0018	0.0170	1.3864	162590.317	1.0846	5085.9064
Daimler	-0.0012	0.0158	1.5342	46561.903	1.0742	5385.4381
Degussa	-0.0005	0.0132	1.2690	167275.915	1.0502	5411.0066
Deutsche Babcock	-0.0024	0.0169	1.2605	250172.8312	1.1060	4924.9345
Deutsche Bank	0.0000	0.0130	1.5035	14278.5103	1.0220	5723.4360
Dresdner Bank	-0.0003	0.0117	1.4000	26.8951	1.0429	5759.6969
Henkel	-0.0001	0.0120	1.5015	115389.1704	1.0264	5859.8711
Hoechst	-0.0004	0.0133	1.4880	14.4027	1.0441	5568.5377
Karstadt	-0.0008	0.0142	1.4572	77208.4636	1.0660	5504.2099
Kaufhof	-0.0009	0.0158	1.4371	23991.8157	1.0633	5283.0660
Linde	-0.0006	0.0104	1.3207	183630.7832	1.0646	5916.8222
Lufthansa	-0.0021	0.019	1.3873	80851.5041	1.1005	4884.2022
MAN St.	-0.0004	0.0162	1.4206	29462.7803	1.0519	5227.0997
Mannesmann	0.0000	0.0168	1.4801	92487.5801	1.0348	5219.6602
Metallgesellschaft	-0.0009	0.0165	1.2814	5.0087	1.0374	4720.8169
Preussag	-0.0012	0.0141	1.3113	67015.7205	1.0976	5338.1673
RWE St.	-0.0003	0.0106	1.2061	271860.9698	1.0554	5708.6056
Schering	0.0000	0.0105	1.1953	198847.2527	1.0332	5712.8074
Siemens	-0.0002	0.0131	1.6597	48.0285	1.0448	5812.4740
Thyssen	-0.0004	0.0182	1.6513	37407.2239	1.0455	5219.3397
VEBA	0.0000	0.0115	1.3120	69488.6749	1.0386	5726.4283
VIAG	-0.0011	0.0123	1.3514	16086.1644	1.1101	5636.6822
VW St.	0.0011	0.0200	1.7554	102879.9261	0.9793	5125.0668

Tab. 20: Maximum-Likelihood-Schätzung bei angenommener SGT2-Verteilung (ohne jeweils 10 Ausreißer)

VLVT-Werte:	Vergleich NV-GT-Verteilung	Vergleich GT-SGT2-Verteilung
Allianz	49.2896**	5.6816*
BASF	106.8296**	1.6884
Bayer	118.0630**	2.1108
Bayerische Hypobank	134.3850**	2.1276
Bayerische Vereinsbank	67.6962**	0.5994
BMW	79.4114**	11.7560**
Commerzbank	193.9956**	1.0510
Continental	46.4630**	8.2112**
Daimler	29.1938**	5.7122*
Degussa	90.7618**	3.0392
Deutsche Babcock	93.3438**	14.5962**
Deutsche Bank	75.9480**	0.6002
Dresdner Bank	118.2878**	3.1706
Henkel	35.1936**	1.4442
Hoechst	242.2122**	2.3808
Karstadt	40.3856**	4.9542*
Kaufhof	46.5902**	4.4574*
Linde	74.1094**	4.7680*
Lufthansa	60.9196**	8.4032**
MAN St.	49.1664**	3.7234
Mannesmann	38.0368**	1.6104
Metallgesellschaft	335.3196**	1.0792
Preussag	86.7484**	10.2372**
RWE St.	211.3404**	5.9368*
Schering	201.5726**	1.4954
Siemens	31.7272**	2.0122
Thyssen	14.4750**	2.4120
VEBA	147.0388**	2.0598
VIAG	200.3434**	13.2752**
VW St.	6.1180*	0.4260

Tab. 21: Verallgemeinerter Likelihoodverhältnistest für die verschiedenen Verteilungen (ohne jeweils 10 Ausreißer), Signifikanzniveau 5% (*) bzw. 1% (**)

Es zeigen sich zwei Ergebnisse. Zum einen ist der Übergang von der Normal- auf die Generalized-t-Verteilung nach wie vor signifikant, auch wenn die Werte des Verallgemeinerten Likelihood-Verhältniswertes zum Teil deutlich abnehmen. Interessant dabei ist, daß der Parameter q der GT- wie auch der SGT2-Verteilung in vielen Fällen gegen unendlich strebt. Offensichtlich führt erst das Auftreten von Ausreißern dazu, daß die Hinzunahme des Parameters q in die Box-Tiao-Verteilung⁴ sinnvoll erscheint. Dagegen ändert sich an der gemessenen Schiefe nur wenig, der Parameter γ wird durch das in der beschriebenen Weise Entfernen von Ausreißern kaum beeinflusst. Auch die Testergebnisse

⁴ Vgl. S. 11.

sprechen dafür, in nunmehr zwölf (vorher dreizehn) Fällen ist der Schiefeparameter signifikant von eins entfernt.

5 Zusammenfassung und Ausblick

Die beschriebene Vorgehensweise zur Generierung schiefer Verteilungen kann auf zahlreiche symmetrische Verteilungen angewandt werden, sie ist nicht auf den vorgeführten Anwendungsfall der Generalized-t-Verteilung beschränkt. Zudem besitzt man aufgrund der allgemeinen Darstellungsweise ein Instrument zur Modellierung sehr unterschiedlicher Arten von Schiefe. Mögliche weitere Anwendungsgebiete liegen in der Verwendung dieser Funktionen für multivariate Zusammenhänge oder die Einführung in die ARCH-Modelle und GARCH-Modelle.

Literaturverzeichnis

Butler, R. / McDonald, J., / Nelson, R. / White, S.: Robust and partially adaptive estimation of regression models, in: The review of economics and statistics, 2, 72 (1990), S. 321-327.

Fernandez, C. / Osiewalski, J. / Steel, M.: Modeling and Inference With ν -Spherical Distributions, in: Journal of the American Statistical Association, 432, 90 (1995), S. 1331-1340.

Fernandez, C. / Steel, M.: On Bayesian Modeling of Fat Tails and Skewness, in: Journal of the American Statistical Association, 441, 93 (1998), S. 359-371.

Handl, A.: Maßzahlen zur Klassifizierung von Verteilungen bei der Konstruktion adaptiver verteilungsfreier Tests im unverbundenen Zweistichproben-Problem, Dissertation, Berlin, 1985.

McDonald, J. / Newey, W.: Partially adaptive estimation of regression, in: Econometric theory, 4 (1988), S. 428-457.

Theodossiou, P.: Financial Data and the Skewed Generalized T Distribution, in: Management Science, Vol. 44, Nr. 12, Teil 1 von 2, Dezember 1998.