Friedrich-Alexander-Universität Erlangen-Nürnberg

Wirtschafts-und Sozialwissenschaftliche Fakultät

Diskussionspapier
21 / 1998

Einflußkurven höherer Verteilungsmaßzahlen

Ingo Klein

Lehrstuhl für Statistik und Ökonometrie
Lehrstuhl für Statistik und empirische Wirtschaftsforschung
Lange Gasse 20 · D-90403 Nürnberg

Einflußkurven höherer Verteilungsmaßzahlen

Ingo Klein
Lehrstuhl für Statistik und Ökonometrie
Universität Erlangen–Nürnberg Lange Gasse 20
D–90403 Nürnberg
E-mail: ingo.klein@wiso.uni-erlangen.de

2. April 2009

Abstract

In almost all studies concerned with the distribution of financial data skewness and leptokurtosis will be measured by the third and the fourth standardized moments. Additionally, there is the problem of some severe outliers in the data. Therefore, skewness and leptokurtosis will be overestimated because the standardized moments are very sensitive with respect to these outliers as the investigation of the influence function of higher order standardized moments shows. In the literature concerned with adaptive and robust statistical methods there are alternative proposals for measuring skewness and kurtosis. These measures depend on means only defined on a part of the support of the considered distribution or on quantiles. Also for these measures the influence functions will be derived to discuss the influence of isolated outliers.

1 Einleitung

Primärmaße einer Verteilung sind Lage– und Skalenparameter. Sämtliche höheren Verteilungsmaßzahlen, die z.B. Schiefe und Wölbung charakterisieren sollen, werden als Sekundärmaße bezeichnet. Diese Sekundärmaße spielen bei der Beurteilung der sog. Stylized Facts von Renditen von Finanzmarkttiteln eine große Rolle. Deren Verteilungen gelten gemeinhin als schief und leptokurtisch, wobei eine Beurteilung ausschließlich über die dritten und vierten standardisierten Momente erfolgt. Gleichzeitig werden aber auch in den Daten namhafte Ausreißer identifiziert, die die Verteilung kontaminieren. Es soll deshalb im folgenden mit dem Konzept der Einflußfunktion untersucht werden, wie stark diese standardisierten Momente von diesen Ausreißern beeinflußt werden. Es besteht zu befürchten, daß das Ausmaß der festgestellten Schiefe und Wölbung überschätzt wird. Zudem werden außerhalb der Finanzmarktliteratur alternative Sekundärmaße diskutiert, die als Maße der Gruppe II (sog. Teilmittelwerte als definiert als Mittelwerte über Teilen des Trägers einer Zufallsvariablen) und als Maße der Gruppe III (Funktionen von Quantilen) bezeichnet werden. Mit der Einflußfunktion wird auch für diese Maße die Ausreißersensitivität untersucht.

2 Einflußkurven

Es sollen nun für die allgemeine Darstellung aller drei Gruppen von Verteilungsmaßen die Einflußkurve angegeben werden. Für spezielle Maßzahlen kann diese den Arbeiten von Ruppert (1987) und Groeneveld (1991) entnommen werden.

Nach Hampel (1968, 1974) ist die Einflußkurve eines statistischen Funktionals $T(F)$ durch

$$IC(x;T(F)) = \lim_{\varepsilon\to 0^+} \frac{T(F_\varepsilon) - T(F)}{\varepsilon}$$

gegeben. $\varepsilon \to 0^+$ heißt, daß lediglich der rechtsseitige Grenzwert betrachtet werden muß. Die Verteilungsfunktion

$$F_\varepsilon = (1-\varepsilon)F + \varepsilon\delta_x$$

stellt eine Kontamination von F dar, wobei die Kontamination mit einer Einpunktverteilung δ_x im Punkte x erfolgt. Die Einflußkurve mißt den infinitesimalen Einfluß einer isolierten Beobachtung auf die durch $T(F)$ gekennzeichnete Maßzahl. Ist die Einflußkurve beschränkt, so ist kein noch so kleiner Anteil noch so extremer Beobachtungen x in der Lage, den Wert von $T(F)$ beliebig zu erhöhen. In diesem Sinne ist eine Maßzahl mit beschränkter Einflußkurve insensitiv bezüglich des Auftretens von Ausreißern.

Das Vorzeichen des Wertes der Einflußfunktion gibt Auskunft, wann ein isolierter Ausreißer den Wert der betreffenden Maßzahl steigert (positives Vorzeichen) bzw. reduziert (negatives Vorzeichen).

Da die betrachteten statistischen Funktionale wiederum Quotienten von statistischen Funktionalen sind, kann die Einflußkurve häufig einfacher für die logarithmierten Maßzahlen hergeleitet werden.

Über die offensichtliche Beziehung

$$IC(x; T(F)) = IC(x; \log T(F))T(F)$$

kann dann die Einflußkurve von $T(F)$ rekonstruiert werden. Im übrigen mißt die Einflußkurve von $\log T(F)$ die relative Änderung von T an der Stelle F infolge einer infinitesimalen Kontimation im Punkt x.

2.1 von standardisierten Momenten

Es soll ohne Beschränkung der Allgemeinheit von einer Zufallsvariablen X mit Verteilungsfunktion F ausgegangen werden mit $E(X) = 0$ und $Var(X) = 1$. Dies bedeutet, daß für X

$$\beta_k(F) = \mu_k(F) = \mu'_k(F)$$

ist, wobei $\mu_k(F)$ bzw. $\mu'_k(F)$ das k–te zentrierte Moment bzw. das k–te Potenzmoment von F bezeichnen.

Theorem 2.1 *Sei X verteilt mit der Verteilungsfunktion F und $E(X) = 0$, $Var(X) = E(X^2) = 1$, dann gilt für die Einflußfunktion des k–ten standardisierten Moments β_k*

$$IC(x; \beta_k(F) = x^k - \frac{k}{2}\mu_k(F)x^2 - k\mu_{k-1}(F)x + \frac{k-2}{2}\mu_k(F).$$

Beweis: Mit

$$\beta_k(F) = \mu_k(F)/\mu_2(F)^{k/2}$$

ist die Einflußfunktion von β_k

$$IC(x; \beta_k(F) = IC(x; \mu_k(F) - \frac{k}{2}\mu_k(F) IC(x; \mu_2(F),$$

so daß lediglich die Einflußkurve von $\mu_k(F)$ benötigt wird. Bezeichne $\mu_i'(F_\varepsilon)$ das i–te Potenzmoment von F_ε, dann ist

$$\mu_k(F_\varepsilon) = \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} \mu_i'(F_\varepsilon)((-1)\mu_1'(F_\varepsilon))^{k-i}$$

mit

$$\mu_i'(F_\varepsilon) = (1-\varepsilon)\mu_i(F) + \varepsilon x^i = \mu_i(F) + \varepsilon(x^i - \mu_i(F))$$

wegen $\mu_1(F) = \mu(F) = 0$.

Dann ist die partielle Ableitung

$$\frac{\partial \mu_k(F_\varepsilon)}{\partial \varepsilon} = \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} \left((x^i - \mu_i(F))((-1)\mu_1'(F_\varepsilon)^{k-i} + (-1)\mu_i'(F_\varepsilon)(k-i)\mu_1'(F_\varepsilon)^{k-i-1} x \right)$$

Wegen $\mu(F_\varepsilon) \to 0$ für $\varepsilon \to 0^+$, sind nur solche Summanden von Null verschieden, in denen entweder $i = k$ oder $i = k-1$ ist, so daß

$$IC(x; \mu_k(F) = x^k - \mu_k(F) - k\mu_{k-1}(F)x$$

ist. Setzt man diesen Ausdruck in die Einflußfunktion von $\beta_k(F)$ ein, so erhält man das gewünschte Ergebnis. □

Damit ist die Einflußfunktion des k–ten standardisierten Moments β_k ein Polynom in k, was belegt, daß β_k mit wachsendem k immer sensitiver bezüglich Ausreißern wird. Dieser Einfluß wird durch die Standardisierung von $\mu_k(F)$ nicht reduziert.

Beispiel 2.1 *1. Das dritte standardisierte Moment β_3 besitzt die Einflußkurve*

$$IC(x; \beta_3(F) = x^3 - 3/2\mu_3(F)x^2 - 3x + 1/2\mu_3(F).$$

Für eine symmetrische Verteilung F mit $\mu_3(F) = 0$ folgt die von Groeneveld (1991, S. 98) angegebene Einflußfunktion.

2. Die Einflußfunktion des vierten standardisierten Momentes β_4 lautet

$$IC_{\beta_4,F}(x) = x^4 - 2\mu_4(F)x^2 - 4\mu_3(F)x + \mu_4(F).$$

Diese unterscheidet sich von der von Ruppert (1987, S.3) angegebenen Einflußfunktion, da dieser eine symmetrische Kontamination und $\mu_3(F) = 0$ betrachtet.

2.2 von Quotienten von Linearkombinationen von Teilmittelwerten

Ausgangspunkt ist die Einflußkurve für das p–te Quantil $F^{-1}(p)$, die nach Huber (1981), S. 51

$$IC(x; F^{-1}(p)) = \frac{p - I(x < F^{-1}(p))}{f(F^{-1}(p)}$$

lautet, wobei $I(.)$ die Indikatorfunktion bezeichnet, die den Wert 1 annimmt, wenn das durch das Argument spezifizierte Ereignis eintritt. Diese Einflußkurve ist offensichtlich beschränkt.

Zunächst soll die Einflußkurve von Teilmitteln angegeben werden, wenn die Quantile $F^{-1}(p)$ und $F^{-1}(q)$ endlich sind.

Lemma 2.1 *Sei X verteilt mit der stetigen Verteilungsfunktion F und der Quantilsfunktion F^{-1}, dann gilt für die Einflußfunktion von $\mu(p), q)$ für $0 < p < q < 1$:*

$$\begin{aligned} IC(x; \mu(p,q)) &= -\mu(p,q) + \frac{1}{q-p}\min\{\max\{x, F^{-1}(p)\}, F{-}1(q)\} \\ &\quad -\frac{1-q}{q-p}F^{-1}(q) - \frac{p}{q-p}F^{-1}(p). \end{aligned}$$

Beweis: Es ist

$$(q-p)\mu(F_\varepsilon^{-1}(p), F_\varepsilon^{-1}(q)) = (1-\varepsilon)\int_{F_\varepsilon^{-1}(p)}^{F_\varepsilon^{-1}(q)} dF(y)dy + \varepsilon\int_{F_\varepsilon^{-1}(p)}^{F_\varepsilon^{-1}(q)} yd\delta_x(y).$$

Differenziert man diesen Ausdruch nach ε

$$(q-p)\frac{\partial\mu(F_\varepsilon^{-1}(p), F_\varepsilon^{-1}(q))}{\partial\varepsilon} = \int_{F_\varepsilon^{-1}(p)}^{F_\varepsilon^{-1}(q)} yf(y)dy$$

$$
\begin{aligned}
&+(1-\varepsilon)\left(\frac{\partial F_\varepsilon^{-1}(q)}{\partial \varepsilon} F_\varepsilon^{-1}(q) f(F_\varepsilon^{-1}(q))\right.\\
&\left.-\frac{\partial F_\varepsilon^{-1}(p)}{\partial \varepsilon} F_\varepsilon^{-1}(p) f(F_\varepsilon^{-1}(p))\right)\\
&+\int_{F_\varepsilon^{-1}(p)}^{F_\varepsilon^{-1}(q)} y d\delta_x(y) + \varepsilon \mathrm{Rest}
\end{aligned}
$$

Der Rest ist nicht zu diskutieren, da er bei dem nun folgenden Grenzübergang $\varepsilon \to 0^+$, der die Einflußkurve des Teilmittels $\mu(p,q)$ liefert, verschwindet:

$$
\begin{aligned}
IC(x;\mu(p,q)) &= -\mu(p,q) + \frac{1}{q-p} IC(x;F^{-1}(q))F^{-1}(q)f(F^{-1}(q))\\
&\quad -\frac{1}{q-p} IC(x;F^{-1}(p))F^{-1}(p)f(F^{-1}(p))\\
&\quad +\frac{1}{q-p}\int_{F^{-1}(p)}^{F^{-1}(q)} y d\delta_x(y).
\end{aligned}
$$

Beachtet man, daß der letzte Summand $xI(F^{-1}(p) < x < F^{-1}(q)/(q-p)$ ist und setzt man die Einflußkurven für die Quantile $F^{-1}(p)$ und $F^{-1}(q)$ ein, so erhält man

$$
\begin{aligned}
IC(x;\mu(p,q)) &= -\mu(p,q)\\
&\quad +\frac{1}{q-p}\big((q - I(x < F^{-1}(q)))F^{-1}(q) - (p - I(x < F^{-1}(p)))F^{-1}(p)\big)\\
&\quad +\frac{1}{q-p} xI(F^{-1}(p) < x < F^{-1}(q)).
\end{aligned}
$$

Benutzt man

$$
I(x > F^{-1}(q)) = 1 - I(x < F^{-1}(q)),
$$

ergibt sich die gesuchte Indikatorfunktion. □

Der Einfluß von Ausreißern wird durch die Indikatorfunktionen beidseitig beschränkt.

Beispiel 2.2 *In dem Maß Q_1 für die Schiefe einer Verteilung geht das Teilmittel $\mu(0.25, 0.75)$ ein. Die zugehörige Einflußkurve lautet dann für dieses Teilmittel:*

$$
\begin{aligned}
IC(x;\mu(0.25,0.75)) &= -\mu(0.25,0.75) + 2\min\{\max\{x, F^{-1}(0.25)\}, F^{-1}(0.75)\}\\
&\quad -1/2(F^{-1}(0.75) + F^{-1}(0.25)).
\end{aligned}
$$

Besondere Diskussion erfordern die Teilmittel über nicht beschränkte Intervalle, für die $p = 0$ bzw. $q = 1$ mit $F^{-1}(1) = \infty$ bzw. $F^{-1}(0) = -\infty$ sind. Das folgende Lemma behandelt die Einflußkurven in diesem Fall.

Lemma 2.2 *Sei X verteilt mit der stetigen Verteilungsfunktion F und der Quantilsfunktion F^{-1}.*

1. *Dann gilt für die Einflußfunktion von $\mu(p,1))$ für $0 < p < 1$:*

$$IC(x;\mu(p,1)) = -\mu(p,1) + \frac{1}{1-p}\max\{x, F^{-1}(p)\} - \frac{p}{1-p}F^{-1}(p)$$

2. *Es gilt für die Einflußfunktion von $\mu(0,q)$ für $0 < q < 1$:*

$$IC(x;\mu(0,q)) = -\mu(0,q) + \frac{1}{q}\min\{x, F^{-1}(q)\} - \frac{1-q}{q}F^{-1}(q)$$

Beweis: Es ist jeweils ein Grenzübergang der im vorstehenden Lemma angegeben Einflußkurve für $p \to 0$ bzw $q \to 1$ durchzuführen. □

Zu beachten sind, daß diese Mittel nur noch eine einseitig beschränkte Einflußkurve aufweisen.

Beispiel 2.3 *Als weitere Bestandteile in das Schiefemaß Q_1 gehen $\mu(0, 0.05)$ und $\mu(0.95, 1)$ ein. Die zugehörigen Einflußfunktionen sind*

$$\begin{aligned} IC(x;\mu(0.95,1)) &= -\mu(0.95,1) + 20\max\{x, F^{-1}(0.95)\} + 19F^{-1}(0.95) \\ IC(x;\mu(0,0.05)) &= -\mu(0,0.5) + 20\min\{x, F^{-1}(0.05)\} + 19F^{-1}(0.05). \end{aligned}$$

Der folgende Satz gibt ausgehend von den Einflußkurven für Teilmittel die Einflußkurven für Quotienten von Linearkombinationen von Teilmitteln an.

Theorem 2.2 *Sei X mit der stetigen Verteilungsfunktion F und der Quantilsfunktion F^{-1} verteilt und sei*

$$Q(F) = \frac{\sum_{i=1}^{k} a_i \mu(p_i, q_i)}{\sum_{j=1}^{l} b_j \mu(r_j, s_j)}$$

für $0 \le p_i < q_i \le 1$, $i = 1, 2, \ldots, k$ und $0 \le r_j < s_j \le 1$, $j = 1, 2, \ldots, l$. Dann gilt für die Einflußkurve von $Q(F)$:

$$IC(x;Q(F)) = Q(F)\left(\frac{\sum_{i=1}^{k} a_i IC(x;\mu(p_i,q_i))}{\sum_{i=1}^{k} a_i \mu(p_i,q_i)} - \frac{\sum_{j=1}^{l} b_j IC(x;\mu(r_i,s_i))}{\sum_{j=1}^{l} b_i \mu(r_i,s_i)}\right)$$

Beweis: Zunächst ergibt sich die Einflußkurve von $\log Q(F)$ als

$$IC(x; \log Q(F)) = \frac{\sum_{i=1}^{k} a_i IC(x; \mu(p_i, q_i))}{\sum_{i=1}^{k} a_i \mu(p_i, q_i)} - \frac{\sum_{j=1}^{l} b_j IC(x; \mu(r_i, s_i))}{\sum_{j=1}^{l} b_i \mu(r_i, s_i)}$$

Benutzt man die bekannte Beziehung zwischen den Einflußkurven von $Q(F)$ und $\log Q(F)$ folgt das Ergebnis sofort. □

Ein einheitliches Bild der Einflußfunktionen zeigt sich erst in den folgenden Beispielen.

Beispiel 2.4 1. *Betrachtet man wiederum das Schiefemaß Q_1, dann ist*

$$\begin{aligned} IC(x; Q_1(F)) &= Q_1(F) \left(\frac{IC(x; \mu(0.95, 1)) - IC(x; \mu(0.25, 0.75))}{\mu(0.95, 1) - \mu(0.25, 0.75)} \right. \\ &\quad \left. - \frac{IC(x; \mu(0.25, 0.75)) - IC(x; \mu(0, 0.05))}{\mu(0.25, 0.75) - \mu(0, 0.05)} \right). \end{aligned}$$

Diese Einflußkurve ist eine Linearkombination der in der vergangenen Beispielen angegebenen Einflußkurven der involvierten Teilmittel und damit beidseitig nicht beschränkt. Einen ähnlichen Verlauf hat die Einflußfunktion für das Schiefemaß H_1 und die Wölbungsmaße Q_2 und H_3 für symmetrische Tails.

2. *Einseitig beschränkte Einflußfunktionen besitzen die Wölbungsmaße H_4 und H_5 für schiefe Verteilungen. Es besteht ein Schutz gegen Ausreißer in dem steileren Ast der Verteilung.*

3. *Das einzige der betrachteten Maß mit beidseitig beschränkter Einflußkurve ist das Maß H_2 für Peakedness.*

2.3 von Quotienten von Linearkombinationen von Quantilen

Da die Maße der dritten Gruppe direkt auf den Quantilen aufsetzen, deren Einflußfunktion bereits angegeben wurde, kann deren Einflußfunktion leicht hergeleitet werden, wie der folgende Satz zeigt.

Theorem 2.3 *Sei X mit der stetigen Verteilungsfunktion F und der Quantilsfunktion F^{-1} verteilt und sei*

$$R(F) = \frac{\sum_{i=1}^{k} a_i F^{-1}(p_i)}{\sum_{j=1}^{l} b_j F^{-1}(q_j)}$$

für $0 \leq p_i \leq 1$, $i = 1, 2, \ldots, k$ *und* $0 \leq q_j$, $j = 1, 2, \ldots, l$. *Dann gilt für die Einflußkurve von* $R(F)$:

$$\begin{aligned} IC(x; R(F)) &= \sum_{i=1}^{k} A_i p_i - \sum_{j=1}^{l} B_j q_j \\ &\quad - \sum_{i=1}^{k} A_i I(x < F^{-1}(p_i)) + \sum_{j=1}^{l} B_j I(x < F^{-1}(q_j)) \end{aligned}$$

mit den Gewichten

$$\begin{aligned} A_i &= a_i / \left(f(F^{-1}(p_i)) \sum_{u=1}^{l} b_u F^{-1}(q_u) \right), \quad i = 1, 2, \ldots, k \\ B_j &= R(F) b_j / \left(f(F^{-1}(q_j)) \sum_{u=1}^{l} b_u F^{-1}(q_u) \right), \quad j = 1, 2, \ldots, l. \end{aligned}$$

Beweis: Die Einflußkurve von $\log R(F)$ lautet

$$IC(x; \log R(F)) = \frac{\sum_{i=1}^{k} a_i IC(x; F^{-1}(p_i))}{\sum_{i=1}^{k} a_i F^{-1}(p_i)} - \frac{\sum_{j=1}^{l} b_j IC(x; F^{-1}(q_j))}{\sum_{j=1}^{l} b_j F^{-1}(q_j)}.$$

Setzt man die Einflußkurven für die Quantile $F^{-1}(p_i)$, $i = 1, 2, \ldots, k$ und $F^{-1}(q_j)$, $j = 1, 2, \ldots, l$ ein, so erhält man das gewünschte Ergebnis. □

Diese Einflußkurve ist für endliche k und l beschränkt, wobei das Supremum des Absolutbetrages der Einflußkurve von der Gewichten A_i und B_j abhängt.

Beispiel 2.5 *Das Schiefemaß von Bowley (1920) besitzt die Parametrisierung* $k = 3$, $l = 2$, $a_1 = a_2 = b_1 = 1$, $a_3 = -2$, $b_2 = -1$ *und lautet*

$$S_2(F) = \frac{F^{-1}(1-p) + F^{-1}(p) - 2F^{-1}(0.5)}{F^{-1}(1-p) - F^{-1}(p)}$$

für $0 < p < 0.5$. *D.h.* $p_1 = q_1 = 1 - p$, $p_2 = q_2 = p$ *und* $p_3 = 0.5$. *Damit sind*

$$\begin{aligned} A_1 &= \left(f(F^{-1}(1-p))(F^{-1}(1-p) - F^{-1}(p)) \right)^{-1} \\ A_2 &= \left(f(F^{-1}(p))(F^{-1}(1-p) - F^{-1}(p)) \right)^{-1} \\ A_3 &= -2 \left(f(F^{-1}(0.5))(F^{-1}(1-p) - F^{-1}(p)) \right)^{-1} \\ B_1 &= S_2(F) \left(f(F^{-1}(1-p))(F^{-1}(1-p) - F^{-1}(p)) \right)^{-1} \\ B_2 &= -S_2(F) \left(f(F^{-1}(p))(F^{-1}(1-p) - F^{-1}(p)) \right)^{-1}. \end{aligned}$$

Zu beachten ist, daß

$$\begin{aligned} B_1 - A_1 &= \frac{S_2(F) - 1}{f(F^{-1}(1-p))(F^{-1}(1-p) - F^{-1}(p))} < 0 \\ B_2 - A_2 &= -\frac{S_2(F) + 1}{f(F^{-1}(p))(F^{-1}(1-p) - F^{-1}(p))} < 0 \end{aligned}$$

wegen

$$S_2(F) - 1 = \frac{2(F^{-1}(p) - F^{-1}(0.5))}{F^{-1}(1-p) - F^{-1}(p)} < 0 \text{ für } p < 0.5$$
$$S_2(F) + 1 = \frac{2(F^{-1}(1-p) - F^{-1}(0.5))}{F^{-1}(1-p) - F^{-1}(p)} > 0 \text{ für } p < 0.5.$$

Damit ist die Einflußfunktion des Maßes von Bowley

$$\begin{aligned} IC(x; S_2(F)) &= (A_1 - B_1)(1-p) + (A_2 - B_2)p + A_3 \\ &\quad + (B_1 - A_1)I(x < F^{-1}(1-p)) + (B_2 - A_2)I(x < F^{-1}(p)) \\ &\quad - A_3 I(x < F^{-1}(0.5)). \end{aligned}$$

Läßt man den ersten von x unabhängigen Summanden stehen und setzt im übrigen die vorstehenden Ausdrücke ein, so folgt

$$\begin{aligned} IC(x; S_2(F)) &= (A_1 - B_1)(1-p) + (A_2 - B_2)p + 0.5A_3 + 2\frac{1}{(F^{-1}(1-p) - F^{-1}(p))^2} \\ &\quad \Big(-\frac{F^{-1}(0.5) - F^{-1}(p)}{f(F^{-1}(1-p))} I(x < F^{-1}(1-p)) \\ &\quad - \frac{F^{-1}(1-p) - F^{-1}(0.5)}{f(F^{-1}(p))} I(x < F^{-1}(p)) \\ &\quad + \frac{F^{-1}(1-p) - F^{-1}(p)}{f(F^{-1}(0.5))} I(x < F^{-1}(0.5)) \Big) \end{aligned}$$

Die Einflußkurve ist zunächst konstant bis zur Stelle $x = F^{-1}(p)$*, springt dann deutlich nach oben, da der dritte Summand des Klammerausdruckes positiv ist, um an der Stelle* $x = F^{-1}(0.5)$ *wieder einen Sprung nach unten zu tätigen. Der letzte Sprung erfolgt an der Stelle* $x = F^{-1}(1-p)$*. Das dann erreichte Niveau der Einflußkurve wird durch den ersten Summanden bestimmt, der stets positiv ist. Dieses Ergebnis schließt die Diskussion in Groeneveld (1991), S. 101 als Spezialfall ein.*

Interessant ist schließlich der Fall einer im Punkte 0 symmetrischen Verteilung F. Da dann $S_2 = 0$ ist, müssen auch $B_1 = B_2 = 0$ sein. Weiterhin ist $A_1 = A_2$, so daß

$$\begin{aligned} IC(x; S_2(F)) &= \frac{1}{2F^{-1}(1-p)^2}\left(\frac{F^{-1}(1-p)}{f(F^{-1}(1-p))} - \frac{F^{-1}(1-p)}{f(0)}\right. \\ &\quad - \frac{F^{-1}(1-p)}{f(F^{-1}(1-p))} I(x < F^{-1}(1-p)) \\ &\quad - \frac{F^{-1}(1-p)}{f(F^{-1}(1-p))} I(x < -F^{-1}(1-p)) \\ &\quad \left. + 2\frac{F^{-1}(1-p)}{f(0)} I(x < 0)\right) \end{aligned}$$

Diese Funktion ist wegen der postulierten Symmetrie von f ungerade.

3 Literatur

1. Bowley, A.L. (1920). *Elements of Statistics.* Charles Sribner's Sons, New York.

2. Büning, H. (1991). *Robuste und adaptive Tests.* DeGruyter, Berlin.

3. Groeneveld, R.A. (1991). An Influence Function Approach to Describing the Skewness of a Distribution. *American Statistician* **45**, 97-102.

4. Hampel, F.R. (1968). *Contributions to the Theory of Robust Estimation.* Ph.D.–Thesis, Berkeley.

5. Hampel, F.R. (1974). The Influence Curve and Its Role in Robust Statistics. *Journal of the American Statistical Association* **69**, 383-393.

6. Handl, A. (1986). *Maßzahlen zur Klassifizierung von Verteilungen bei der Konstruktion adaptiver verteilungsfreier Tests im unverbundenen Zweistichproben–Problem.* Dissertation, Freie Universität Berlin.

7. Hogg, R.V. (1974). Adaptive Robust Procedures. A Partial Review and Some Suggestions for Further Applications and Theory. *Journal of the American Statistical Association* **69**, 909–927.

8. Hogg, R.V. (1982). On Adaptive Statistical Inference. *Communications in Statistics, Theory and Methods* **11**, 2351–2542.

9. Huber, P.J. (1981). *Robust Statistics.* Wiley, New York

10. Ruppert, D. (1987). What is Kurtosis? An Influence Function Approach. *American Statistician* **41**, 1-5.