Mathematik für Wirtschaftswissenschaftler: Übungsaufgaben

an der
Fachhochschule Heilbronn
im
Wintersemester 2002/2003

Dr. Matthias Fischer

Friedrich-Alexander-Universität Erlangen-Nürnberg
Lehrstuhl für Statistik und Ökonometrie
Lange Gasse 20
90403 Nürnberg
Email: matthias.fischer@wiso.uni-erlangen.de

07.10.2002

Aufgaben zu den Elementare Grundlagen der Mathematik I

1. Erklären Sie den Unterschied zwischen Positions- und Additionssystem an einem Beispiel.

2. Stellen Sie $1234,678$ mit Hilfe von Zehnerpotenzen dar.

3. Berechnen Sie
$$6 + 5 \cdot (-6) : 7 \cdot 7 - 3 \cdot (9 - 3)$$
$$4^2 - (-3) : (-6) \cdot 9 \cdot 4 + \cdot(-3 - 3)$$

4. Vereinfachen Sie die folgenden Terme:
$$3a + 3b + a - b + 7a$$
$$3a + 3b + (a - b + 7a)$$
$$-3x - 5x + y - y + 7y$$
$$-3x - (5x + y - y + 7y)$$

Aufgaben zu den Elementare Grundlagen der Mathematik II

5. Berechnen Sie

$$13(4x + 2y) - 26(2x + 4y)$$
$$(4x + 2y) : 2 - (x + 0.5y)$$

6. Kürzen Sie soweit wie möglich:

$$\frac{15ab + 12bc}{63bd + 9bc}; \qquad \frac{3x^2 - 4x + 7}{14 - 8x + 6x^2}, \qquad \frac{4x^3}{23e} : \frac{16x^4}{46e^2}, \qquad \frac{4x^3}{6x^3} \cdot \frac{x^2 - 4}{(x-2)(x+2)}$$

7. Berechnen Sie

$$\frac{a}{a+b} + \frac{-b}{a-b}, \qquad \frac{a}{a+b} - \frac{a^2}{(a+b)^2}$$

8. Berechnen Sie

$$\left(\frac{2}{3}\right)^4; \qquad (-1)^{2n} \cdot (-1)^{2n+1}; \qquad (-2)^6 : (-4)^3; \qquad (-2)^{-2} : (-4)^4$$

Aufgaben zu den Elementare Grundlagen der Mathematik III

9. Berechnen Sie

$$\sqrt[3]{8}; \qquad \sqrt[2]{16}; \qquad 16^{1/2}; \qquad 32^{1/5}; \qquad 32^{3/5}; \qquad \sqrt{\sqrt[5]{32}}$$

10. Bestimmen Sie die folgenden Logarithmen:

$$\log_7(34); \qquad \log_6(34); \qquad \ln(e^2); \qquad \log(10)$$

11. Vereinfachen Sie

$$\log\frac{x^4}{y^3}; \qquad \ln\frac{x^{-1}}{x^2}; \qquad \log\sqrt{\frac{y^{-1}}{y^3}}$$

12. Berechnen Sie

$$|-2-(-3)|; \qquad |\log(2-8\cdot(-4))|; \qquad |(3+2x)^2|; \qquad |2-3|; \qquad |3-2|; \qquad |-3-2|$$

Aufgaben zu den Elementare Grundlagen der Mathematik IV

13. Berechnen Sie

$$\sum_{i=2}^{3001}(i+2); \qquad \sum_{i=2}^{3001} 2i; \qquad \sum_{i=5}^{3005}(i+5); \qquad \sum_{i=1}^{5}(3i+0.3); \qquad \sum_{i=1}^{5}\log(i^i)$$

14. Berechnen Sie

$$\prod_{i=2}^{6}(i+1); \qquad \prod_{i=2}^{2} 2i; \qquad \prod_{i=5}^{7}(i-5)^2; \qquad \prod_{i=1}^{5} 3i; \qquad \prod_{i=1}^{3}\log(i^i)$$

15. Berechnen Sie

$$\frac{5!}{6!}; \qquad \frac{2!}{4!}; \qquad \frac{5!}{0!}; \qquad \prod_{i=1}^{5} i!$$

Aufgaben zu den Elementare Grundlagen der Mathematik V

16. Berechnen Sie

$$\binom{6}{4}; \qquad \binom{6}{2}; \qquad \binom{6}{1}; \qquad \binom{6}{0}; \qquad \binom{6}{6}; \qquad \binom{4}{3}$$

17. Die Aktien A stieg im letzten Jahr von ursprünglich 50 Euro auf 75 Euro. Wieviel Prozent entspricht dies?

18. Die Aktien B liegt am Ende des Jahres bei 120 Euro. Sie fiel 20%. Wie hoch war der Kurs am Anfang des Jahres.

19. Die Aktie C lag Anfang des Jahres bei 120 Euro. Sie stieg um 15%. Wie hoch war der Kurs am Ende des Jahres?

20. Geben Sie jeweils 3 Beispiele für Aussagen bzw. Aussageformen an. Verneinen Sie die jeweiligen Aussagen. Ergänzen Sie die Aussageformen zu Aussagen.

Aufgaben zu den Elementare Grundlagen der Mathematik VI

21. Mit den Aussagen A: "3 quadriert ergibt 9", B:"Die Wurzel aus 9 ist 3" und C:"7 ist eine gerade Zahl" sind folgende Aussagenverknüpfung zu bilden und auf ihren Wahrheitswert zu überprüfen:

$$A \wedge \overline{B}; \qquad A \vee \overline{B}; \qquad ; \overline{A \vee \overline{B}} \qquad ; A \vee C; \qquad A \Rightarrow C; \qquad A \Leftrightarrow B$$

22. Betrachten Sie die folgenden Mengen:
$A = \{1; 3; 9; 16\}, \quad B = \{1; 2; 3; 4\}, \quad C = \{\}, \quad D = \{x \in \mathbb{N} \wedge x \leq 5\}$
Bilden Sie damit die folgenden Teilmengen der natürlichen Zahlen:

$$A \cup B, \quad C \cap D, \quad A \cap D, \quad \overline{A} \cap D, \quad \overline{A \cap D}, \quad A \setminus D$$

Wie lautet die Potenzmenge von B und von A? Bilden Sie $A \times B$.

23. Geben Sie für die Mengen $A = \{1, s, r, 4\}$ und $B = \{1, 2, 5, 8\}$ eine bijektive und eine surjektive, aber nicht bijektive Abbildung an.

Aufgaben zu den Elementare Grundlagen der Mathematik VII

24. Lösen Sie das folgende lineare Gleichungssystem mit dem Additionsverfahren, dem Gleichsetzungsverfahren und dem Einsetzungsverfahren:

$$x + y = 4 \text{ und } 2x - 3y = 6$$

25. Lösen Sie die quadratischen Gleichungen:

$$2x^2 - 4x = 0; \qquad 3x^2 - 4x - 15 = 0; \qquad 6y^4 - 8y^2 - 30 = 0$$

26. Lösen und klassifizieren Sie die Gleichungen:

$$2^x = 64; \qquad 888 = 8^{2-x}; \qquad \sqrt{2+x} = 3; \qquad \frac{1}{\sqrt{2+x}} = 3x^{-1}$$

27. Lösen Sie die Ungleichungen:

$$4y \geq 8; \qquad \frac{32 - 4x}{2x} < 6; \qquad -3(1 + 2x) > 2x + 2.$$

Lösungen zu den Elementare Grundlagen der Mathematik III

1. siehe Skript

2. siehe Skript

3. $-42; \qquad -8$

4. $11a + 2b; \qquad 11a + 2b; \qquad -8x + 7y; \qquad -8x - 7y$

5. $-78y; \qquad x + 0.5y$

6. $(5a + 4c)/(21d + 3c); \qquad 0.5; \qquad 0.5e/x; \qquad 2/3$

7. $(a^2 - 2ab - b^2)/(a^2 - b^2); \qquad (ab)/(a^2 + b^2)$

8. $0.197; \qquad -1; \qquad 1; \qquad 0.0009766$

9. $2; \qquad 4; \qquad 4; \qquad 2; \qquad 8; \qquad 1.41$

10. 1.812; 1.968; 2; 1

11. $4\log x - 3\log y$; $-3\ln x$; $-2\log y$

12. 1; 1.531; $(3+2x)^2$; 1; 1; 5

13. 4510500; 9009000; 4531510; 46.5; 18.2745

14. 2520; 4; 0; 29160; 0

15. $1/6$; $1/12$; 120; 34560

16. 30; 30; 6; 1; 1; 4

17. 50%

18. 150

19. 138

20. siehe Skript

21. f, w, f, w, f, f

22. $\{1,2,3,4,9,16\}$; $\{\}$; $\{1,3\}$; $\{2,4,5\}$; $\mathbb{N}\setminus\{1,3\}$; $\{9,16\}$; , Rest siehe Skript.

23. $\{(1,1);(s,2);(r,5);(4,8)\}$, $\{(1,1);(s,2);(r,5);(1,8)\}$

24. $x = 3.6, y = 0.4$

25. $(0,2)$; $(2.5, -7/6)$; $(\pm\sqrt{2.5})$

26. 6; -1.26; 7; $(-1.684, 10.684)$

27. $y \geq 4$; $\{x > 2, x < 0\}$; $x < -5/8$

Aufgaben zu Funktionen I

1. Bestimmen Sie für folgende Funktionen den Wertebereich:

$$D(f) = \{-4, -3, -2, -1, 0, 1, 2\} \quad \text{und } f(x) = x^3$$

$$D(f) = \mathbb{N}_0 \quad \text{und } f(x) = (-1)^{2x}$$
$$D(f) = \mathbb{N}_0 \quad \text{und } f(x) = (-1)^{2x} \cdot x$$
$$D(f) = \{x \in \mathbb{R} | x \geq 2\} \quad \text{und } f(x) = \sqrt{x-2} + 1$$

2. Berechnen Sie die Funktionswerte $f(0), f(1), f(-1)$ und $f(4)$ folgender Funktionen:

$$f(x) = x^2, \quad f(x) = |x|^2, \quad f(x) = \log_3(2 + |-x+2|)$$

Aufgaben zu Funktionen II

3. Zeichnen Sie die folgenden Funktionen in einem Koordinatensystem:

$$f(x) = x, \quad f(x) = 2x, \quad f(x) = 0.5x, \quad f(x) = x^2, \quad f(x) = -x^2.$$

4. Bestimmen Sie die Steigung der folgenden Funktionen:

$$y = 2x + 3, \quad y = 3, \quad y = 3 - \frac{1}{2}x.$$

5. Zeichne Sie die beiden nachfolgenden Funktionen in ein Koordinatensystem und bestimmen Sie grafisch die Steigung im Punkt $(2, f(2))$. Welche der Funktionen ist explizit, welche implizit definiert?

$$y - x^2 = 1, \quad y = \log(x).$$

Aufgaben zu Funktionen III

6. Bestimmen Sie den größtmöglichen Definitionsbereich der Verknüpfung (Funktion) $h(x) = f(g(x)$ mit

$$D(g) = \mathbb{R}, \quad g(x) = x^2 \text{ und } D(f) = \mathbb{R}_+, \quad f(y) = \sqrt{y}$$

$$D(g) = \mathbb{R}, \quad g(x) = x^2 \text{ und } D(f) = \mathbb{R} \cap [2, \infty), \quad f(y) = \sqrt{y-2}$$
$$D(g) = \mathbb{R}_+, \quad g(x) = \log(x) \text{ und } D(f) = \mathbb{R}, \quad f(y) = x^2$$

7. Bestimmen Sie die inverse Funktion der nachfolgenden Funktionen sowie den maximalen Definitionsbereich:

$$y = 2x + 3, \quad y = x^2 + 2, \quad y = 2^x, \quad y = \ln(x).$$

8. Untersuchen Sie die nachfolgenden Funktionen hinsichtlich Definitionsbereich, Monotonie, Wendepunkte, Symmetrie, Nullstellen und Absolutglied.

$$y = \log(x), \quad y = |\log(x)|, \quad y = \log(|x|), \quad y = x^3, \quad y = x^4.$$

Aufgaben zu Funktionen IV

9. Bestimmen Sie, ob es sich bei den nachfolgenden Funktionen um rationale oder nichtrationale Funktionen handelt. Falls es sich um rationale Funktionen handelt, sind diese ganzrational oder gebrochen rational?

$$y = \log(x^2), \quad y = \frac{x^2}{1+x^2}, \quad y = x - x^2(x-1), \quad y = \tan(|\alpha|).$$

10. Bestimmen Sie die Ordnung und die Nullstellen nachfolgender Polynome:

$$y = f(x) = 3x, \quad y = 3x^2 - 2, \quad f(v) = 3v^3 - 2v, \quad f(u) = u^4 + 4u^2 + 1.$$

11. Führen Sie folgende beiden Polynomdivisionen durch:

$$(8x^3 + 12x^2 - 4x + 8) : (2x + 4)$$

$$(16x^4 - 2x^3 + 5x^2 + 2) : (x + 1).$$

Aufgaben zu Funktionen V

12. Zeichnen Sie den Graphen folgender gebrochen rationaler Funktionen und geben Sie die Nullstellen, Polstellen und behebbaren Definitionslücken an:

$$f(x) = \frac{6}{x^2+1}, \quad f(x) = \frac{x^2-1}{x^2+1}, \quad f(x) = \frac{x^2-4}{x-2}, \quad f(x) = \frac{x-1}{x+1}$$

13. Zeichnen Sie im Intervall $[-3, 3]$ die Graphen folgender Exponentialfunktionen:

$$y = 2^x, \quad y = 2^{-x}, \quad y = -2^x.$$

14. Zeichnen Sie im Intervall $[0, 3]$ die Graphen folgender Logarithmusfunktionen:

$$y = \ln(x), \quad y = \log(x), \quad y = \log_{2.35}(2x).$$

Lösungen zu Funktionen

1. $\{-64, -27, -8, -1, 0, 1, 8\}$; $\{1\}$; $\mathbb{N}_0$; $\{x|x \geq 1\}$

2. $(0, 1, 1, 16)$; $(0, 1, 1, 16)$; $(1.262, 1, 1.465, 1.262)$;

3. klar

4. $2, 0, -0.5$

5. erste implizit, zweite explizit, Steigung: Tangente im Punkt (2,f(2))

6. $\mathbb{R}$, $|x| \leq 2$, $x > 0$

7. Inverse: $y = x/2 - 1.5$, $y = sqrtx - 2$, $y = ldx$, $y = e^x$, Def. klar.

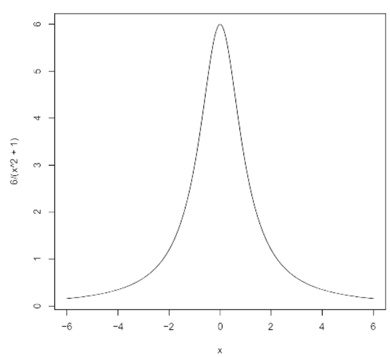
8. $(x > 0, w, -, -, 1, -)$, $(x > 0, f/w, -, -, 1, -)$, $(x \setminus 0, f/w, achsen, \pm 1, -)$
   $(\mathbb{R}, w, 0, punkt, 0, 0)$, $(\mathbb{R}, f/w, -, achsen, 0, 0)$

9. NR; Gebr.R; GanzR; NR

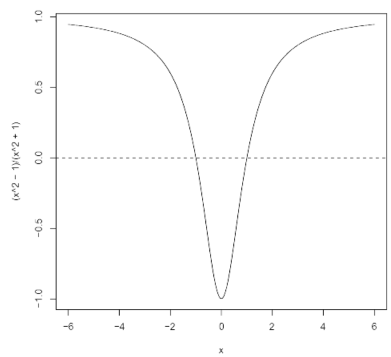
10. Ordnung: (1,2,3,4) Nullstellen: 0; $\pm\sqrt{2/3}$; $0, \pm\sqrt{2/3}$; keine reellen Nst

11. $4x^2 - 2x + 2$ und $16x^3 - 18x^2 + 23x - 23 + Rest$

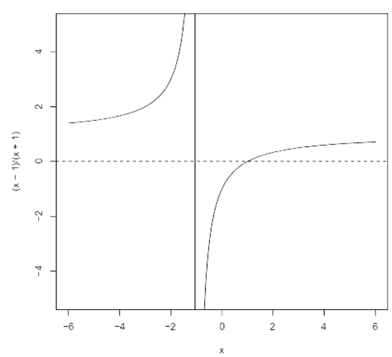
12. Verlauf der Funktionen ((c) ist Gerade!))



(a)

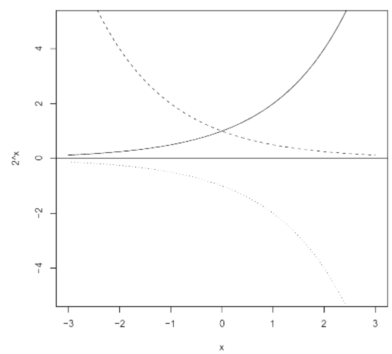


(b)

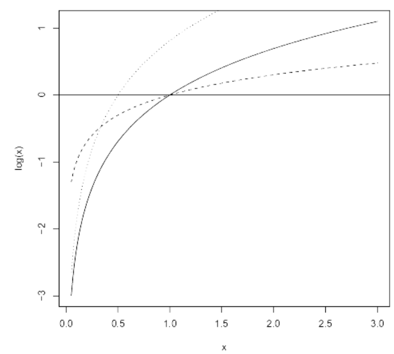


(d)

13. und 14. Verlauf der Funktionen



(13)



(b)

Aufgaben zu Folgen, Reihen, Grenzwerte und Stetigkeit I

1. Geben Sie für die Folgen $f(k)$ mit $k \in \mathbb{N}$ die Konstruktionsvorschrift (z.B. $f(k) = k^2$) an:

$$f_1 : 1, 0, 1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, \ldots$$
$$f_2 : 1, 8, 27, 64, 125, 216, 343, 512, 729, 1000, \ldots$$
$$f_3 : 0.0000, 0.6931, 1.0986, 1.3863, 1.6094, 1.7918, \ldots$$
$$f_4 : -2, 4, -6, 8, -10, 12, -14, 16, -18, 20, \ldots$$

2. Überprüfen Sie, ob es sich bei den nachfolgenden Folgen um (un-)endliche, (nicht-)konstante und (nicht-)alternierte Folgen handelt. Geben Sie die ersten 5 Folgenglieder an.

$$f(k) = 3k^k + 1, \quad k = 1, 2, \ldots, 5$$
$$f(k) = 3k - 2k + 3 - k, \quad k = 1, 2, \ldots, 10$$
$$f(k) = (-1)^{(-1)^k}, \quad k = 1, 2, \ldots$$
$$f(k) = (-1)^{2k} \cdot 5, \quad k = 1, 2, \ldots$$
$$f(k) = (-1)^{2k+1} \cdot 5, \quad k = 1, 2, \ldots, 10$$

Aufgaben zu Folgen, Reihen, Grenzwerte und Stetigkeit II

3. Bilden Sie für die Folgen der letzten Aufgabe die ersten 5 Folgenglieder der Partialsumme.

4. Geben Sie jeweils ein Beispiel für eine arithmetische bzw. eine geometrische Folgen an.

5. Untersuchen Sie ob es sich bei den nachfolgenden Reihen um arithmetische oder geometrische Folgen handelt. Bestimmen Sie jeweils auch s_{10}.

$$f_1 : 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19, 21, 23, \ldots$$

$$f_2 : 1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256, 512, \ldots$$
$$f_3 : -1, 1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, \ldots$$
$$f_4 : -1, -2, -4, -8, -16, -32, -64, -128, -256, -512, \ldots$$

Aufgaben zu Folgen, Reihen, Grenzwerte und Stetigkeit III

6. Das erste Glied einer geometrischen Folge ist 5. Der Quotient q ist 1.5. Geben Sie die ersten 5 Folgenglieder und die Summe der ersten 5 Summanden an.

7. Das erste Glied einer arithmetischen Folge ist 5. Der Differenz d ist 1.5. Geben Sie die ersten 5 Folgenglieder und die Summe der ersten 5 Summanden an.

8. Gegeben sind die Glieder $a_5 = 13$ und $a_{10} = 23$ einer arithmetischen Folge. Geben Sie das Anfangsglied, die konstante Differenz sowie a_{15} und s_{15} an.

9. Im einem Unternehmen wird innerhalb eines Jahres eine monatliche Produktionssteigerung um 2% erzielt. Im Januar betrug die Produktion 1600 Stück. Wie hoch ist die Produktion zwei Jahre später?

Aufgaben zu Folgen, Reihen, Grenzwerte und Stetigkeit IV

10. Untersuchen Sie die nachfolgenden Folgen ($k \in \mathbb{N}$) auf ihre Beschränktheit. Geben Sie, falls möglich, obere und untere Schranke, sowie jeweils die kleinste obere und die größte untere Schranke an. Untersuchen Sie die Folgen auch hinsichtlich von Monotonie sowie Konvergenz und Divergenz.

$$a_k = f(k) = 4k, \quad a_k = f(k) = 4k - \frac{1}{k^2}, \quad a_k = f(k) = k{-}1,$$

$$a_k = f(k) = (-1)^k \cdot \frac{4}{k}, \quad a_k = f(k) = 4k \cdot \frac{1}{k^2}$$

11. Bestimmen Sie die Häufungspunkte der nachfolgenden Folgen.

$$a_k = f(k) = 4 \cdot k \cdot (-1)^k, \quad a_k = f(k) = 4k \cdot \frac{(-1)^k}{k^2}, \quad a_k = f(k) = 4 + k{-}1,$$

Aufgaben zu Folgen, Reihen, Grenzwerte und Stetigkeit V

12. Bestimmen Sie mit Hilfe der Grenzwertsätze die Grenzwerte folgender Folgen:

$$a_k = 2 + 4k^{-1}, \quad a_k = (2 - 3/k)(3 + k^{-1}), \quad a_k = \frac{4k^2 + 3}{6k^2 + 2}$$

13. Gegeben seien die Folgen

$$a_k = 2^k, \quad a_k = 3^{-k}, \quad a_k = 0.0001.$$

Sind die zugehörigen unendlichen Reihen konvergent?

14. Untersuchen Sie die nachfolgenden Funktionen auf Stetigkeit und ergänzen Sie jeweils die Unstetigkeitsstellen:

$$f(x) = x^3, \quad f(x) = \frac{x^2 - 9}{x + 3}, \quad f(x) = \frac{1}{(x - 3)^2}.$$

Lösungen zu Folgen, Reihen, Grenzwerte und Stetigkeit

1. $f(k) = k^2; \quad f(k) = k^3; \quad f(k) = \ln k; \quad f(k) = (-1)^k(2k+2)$

2. $(endl/nichtkon/nichtalt); (4, 13, 82, 769, 9376)$
   $(endl/kon/nichtalt); (3, 3, 3, 3, 3)$
   $(unendl/kon/nichtalt); (-1, -1, -1, -1, -1)$
   $(unendl/kon/nichtalt); (5, 5, 5, 5, 5)$
   $(endl/nichtkon/alt); (5, 5, 5, 5, 5)$

3. $(4, 17, 99, 868, 10244)$, $(3, 6, 9, 12, 15)$, $(-1, -2, -3, -4, -5)$,
   $(5, 10, 15, 20, 25)$, $(-5, 0, -5, 0, -5)$

4. siehe Skript

5. $(a, 140)$; $(g, 1023)$; $(a, 80)$; $(g, -1023)$

6. $5, 7.5, 11.25, 16.875, 25.3125$ Summe: 65.9375

7. $5, 6.5, 8, 9.5, 11$ Summe: 40

8. $a_1 = 5, d = 2, a_{15} = 33, s_{15} = 285$

9. 2573.5

10. $(4, \infty, Wachs., Div)$, $(3, \infty, Wachs., Div)$, $(0, \infty, Wachs., Div)$
    $(-4, 2, --, Kon.)$, $(0, 4, Abn., Kon)$

11. keine; 0; keine

12. 2; 2/3; 4/6

13. NEIN, Ja , NEIN

14. stetig; behebbare Def.lücke; Unstetigkeitsstelle

Aufgaben zur Finanzmathematik I

1. Student Clever besitzt ein Anfangskapital von 1000 Euro. Dieses soll 5 Jahre bei einem Zinssatz von 5% angelegt werden. Welches Endkapital würde sich ergeben bei

   a) jährlich nachschüssiger einfacher Verzinsung,
   b) jährlich vorschüssiger einfacher Verzinsung,
   c) jährlich nachschüssiger Verzinsung mit Zinseszinsen,
   d) jährlich vorschüssiger Verzinsung mit Zinseszinsen,
   e) stetiger Verzinsung?

2. Student Clever's Sparbuch weist ein Endkapital von 1000 Euro auf. Das Anfangskapital wurde 5 Jahre bei einem Zinssatz von 5% angelegt werden. Wie groß war dieses bei

   a) jährlich nachschüssiger einfacher Verzinsung,
   b) jährlich vorschüssiger einfacher Verzinsung,
   c) jährlich nachschüssiger Verzinsung mit Zinseszinsen,
   d) stetiger Verzinsung?

Aufgaben zur Finanzmathematik II

3. Student Clever zahlte am 20.01.00 5000 Euro auf sein Sparbuch bei einem Zinssatz von 3.25% ein. Wieviele Euro sind am 15.04.00 auf seinem Sparbuch, wenn er es dann gekündigt hat?

4. Wie groß müsste der Zinssatz sein, damit das Endkapital aus der letzten Teilaufgabe 5010 Euro beträgt?

5. Wie würde sich das Ergebnis von Teilaufgabe 3 ändern, wenn sie erst zum 15.04.03 gekündigt hätten. Unterstellen Sie konstante Zinssätze.

6. Für einen Bundesschatzbrief bekommt man für einem Anfangskapital von 1000 Euro am Ende 7-jährigen Laufzeit 1600 Euro zurück. Dabei lag der Zinssatz für die ersten 4 Jahre konstant bei 6%. Die letzten beiden Jahre gab es jeweils 6,5% Zinsen. Wie groß war der Zinssatz im 5-ten Jahr?

7. Berechnen Sie die Rendite i zu Teilaufgabe 6.

Aufgaben zur Finanzmathematik III

8. Student Clever legt 1000 Euro bei einem jährlichen Zinssatz von 5% und monatlicher Verzinsung 5 Jahre an. Wie groß ist das Endkapital?

9. Berechnen Sie den Aufgabe 8 zugehörigen effektiven Zinssatz (bei jährlicher Verzinsung).

10. Für ein Kapital von 1000 Euro bekam man nach 3 Jahren und bei stetiger Verzinsung 1130 Euro. Wie groß war der stetige Zinssatz?

11. Erläutern Sie kurz die Begriffe Zeitrente, Leibrente, Rentenendwert, Rentenbarwert und Rentenbarwertfaktor.

12. Rentner Sunny bekommt 10 Jahre jährlich eine nachschüssige Rente in Höhe von 1000 Euro. Berechnen Sie den Rentenendwert.

Aufgaben zur Finanzmathematik IV

13. Wie ändert sich der Endwert, wenn die Rente vorschüssig gezahlt wird?

14. Welchen heutigen Wert hat eine 10 Jahre lang nachschüssig zu zahlende Rente von jährlich 10000 bei $p = 4$?

15. Wie ändert sich der Barwert, wenn die Rente vorschüssig gezahlt wird?

16. Student *Nullbockaufmathe* ist in Asien angekommen mit einer (mit 5% verzinsten) Reisekasse in Höhe von 25000 Euro. Wie lange können er in Asien bleiben, wenn er am Ende jeden Jahres der Reisekasse 2000 Euro zum Leben entnimmt?

17. Wie lange kann er bleiben, wenn er schon am Anfang des Jahres das Geld abhebt?

18. Berechnen Sie den Wert einer ewigen Rente bei nachschüssigen (alternativ: vorschüssigen) Zahlungen in Höhe von 500 Euro und $i = 0.04$.

Aufgaben zur Finanzmathematik V

19. Eine Rente von 53 Euro soll 25 Jahre lang jährlich nachschüssig gezahlt werden. Die erste Zahlung soll erst nach 7 Jahren beginnen. Wieviel ist die Rente also heute wert, wenn mit 5% Zinsen gerechnet wird?

20. Student Clever zahlt von seinem 20. bis zum 35. Lebensjahr jährlich nachschüssig 500 Euro in die Rentenkasse. Wie hoch ist der Wert der Versicherungsbeiträge (Verzinsung jährlich 6%) am Ende des 40-ten Lebensjahres?

21. Student Clever zahlt 4 Jahre lang auf einen Rentensparvertrag monatlich nachschüssig 55 Euro. Wie hoch ist sein Kapital am Ende der Vertragszeit, wenn ein Zinsfuß von $p = 6$ vereinbart wurde?

22. Student Clever zahlt 4 Jahre lang auf einen Rentensparvertrag monatlich vorschüssig 55 Euro. Wie hoch ist sein Kapital am Ende der Vertragszeit, wenn ein Zinsfuß von $p = 6$ vereinbart wurde?

23. Student Clever legt vierteljährlich 500 Euro bei vierteljährlicher Verzinsung und einem Zinssatz von 4% p.a. an. Was gibt's nach 4 Jahren zurück?

Aufgaben zur Finanzmathematik VI

24. Student Röhrl nimmt einen Kredit in Höhe von 20.000 Euro auf, um an der Universität mit einem neuen Mazzta MX3 zu erscheinen. Der Zinssatz beträgt dabei 9%. Jährlich sollen dabei 3000 Euro getilgt werden. Um welche Art von Kredit handelt es sich hierbei? Stellen Sie einen Tilgungsplan für Student Röhrl auf.

25. Student Fränsen nimmt ebenfalls einen Kredit in Höhe von 20.000 Euro auf, um an der Universität ebenfalls mit einem neuen Mazzta MX3 zu erscheinen. Der Zinssatz beträgt dabei ebenfalls 9%. Jährlich sollen dabei 2000 Euro allein zur Rückzahlung des Kredits aufgewandt werden. Um welche Art von Kredit handelt es sich hierbei? Stellen Sie einen Tilgungsplan für Student Fränsen auf.

Aufgaben zur Finanzmathematik VII

26. Berechnen Sie jeweils (wenn möglich) den Rentenendwert für nachfolgende Zahlungen. Dabei beträgt die Laufzeit 5 Jahre und der jährliche Zins 5% p.a.

    1. Rente nachschüssig, jährlich 1000 Euro.
    2. Rente vorschüssig, jährlich 1000 Euro.
    3. **ewige Rente** nach- bzw. vorschüssig, jährlich 1000 Euro.
    4. um 10 Jahre aufgeschobene nachschüssige Rente, jährlich 1000 Euro.
    5. nach 3 Jahren abgebrochene nachschüssige Rente, jährlich 1000 Euro.
    6. Rente nachschüssig, vierteljährlich 250 Euro, Zins jährlich.
    7. Rente nachschüssig, jährlich 1000 Euro, Zins vierteljährlich.
    8. Rente nachschüssig, vierteljährlich 250 Euro, Zins vierteljährlich.

Lösungen zur Finanzmathematik

1. $1250; \quad 1333.33; \quad 1276.28; \quad 1292.36; \quad 1284,03$

2. $800; \quad 750; \quad 783.53; \quad 778.80$

3. 85 Zinstage; 5038.36

4. ca. 0.85%

5. 341 Zinstage + 2 Jahre + 74 Zinstage: 5573.51

6. 11.73%

7. 6.94%

8. 1283.36

9. ca. 5.12%

10. ca. 4.1%

11. siehe Skript

12. 12577.89

13. 13206.79

14. 77217.35

15. 81078.22

16. etwas mehr als 20 Jahre

17. etwas weniger als 20 Jahre

18. 12500 bzw. 13000

19. 530.86

20. 15574.25

21. $r_e = 678.15, \quad 2966.65$

22. $r_e = 681.45, \quad 2981.08$

23. 8628.93

24. Annuitätentilgung

Restschuld	Zins	Tilgung
20000,00	1800,00	1200,00
18800,00	1692,00	1308,00
17492,00	1574,28	1425,72
16066,28	1445,97	1554,03
14512,25	1306,10	1693,90
12818,35	1153,65	1846,35
10972,00	987,48	2012,52
8959,48	806,35	2193,65
6765,83	608,92	2391,08
4374,76	393,73	2606,27
1768,48	159,16	1609,32

25. Ratentilgung

Restschuld	Zins	Tilgung
20000	1800	2000
18000	1620	2000
16000	1440	2000
14000	1260	2000
12000	1080	2000
10000	900	2000
8000	720	2000
6000	540	2000
4000	360	2000
2000	180	2000

26. 5525.63, 5801.91, nicht möglich, 5525.63, 3475.63, 5629.24, 5536.08, 5640.75

Aufgaben zur Differentialrechnung I

1. Gegeben seien die Kostenfunktionen $K_1(x) = 3000+2x$ und $K_2(x) = 2x^3+200$. Es soll nun die Produktion von 2 auf 4 Mengeneinheiten gesteigert werden. Bestimmen Sie die Kostensteigerungen und zugehörige Differenzenquotienten und interpretieren Sie diese.

2. Differenzieren Sie die beiden Kostenfunktionen aus Aufgabe 1 und bestimmen Sie anschließend für die Produktion von 2 ME die marginalen Gesamtkostenänderungsraten.

3. Prüfen Sie, ob die Funktion $y = f(x) = |x - 2|$ an den Stellen 2 und -2 differenzierbar ist.

4. Berechnen Sie die Ableitungen der folgenden Funktionen:

$$y = x^4, \quad y = \sqrt[3]{x}, \quad y = \frac{1}{x^4}, \quad y = 4x^4, \quad y = 44545, \quad y = \sqrt[4]{x} + 4.$$

Aufgaben zur Differentialrechnung II

5. Berechnen Sie die Ableitungen der folgenden Funktionen:

$$y = x^4 + x^3, \quad y = \sqrt[3]{x} - 6x^2 + e^x, \quad y = \frac{1}{x^4} + \frac{4}{x}, \quad y = 4x^4 + 3x^3.$$

6. Berechnen Sie die Ableitungen der folgenden Funktionen:

$$y = \frac{x^4}{x^3}, \quad y = \frac{x^4 + 1}{x^3 + 1}, \quad y = \frac{x^4 + x^3}{x^3 + x^4}, \quad y = \frac{x^4 + e^x}{x^3 + \ln(x)}.$$

7. Berechnen Sie die Ableitungen der folgenden Funktionen:

$$y = \sqrt{x^4 + x^3}, \quad y = \log_2(6x^2 + e^x), \quad y = \left(\frac{1}{x^4} + \frac{4}{x}\right)^2, \quad y = \exp(4x^4 + 3x^3).$$

8. Berechnen Sie die zweite Ableitung der Funktionen aus Aufgabe 5.

Aufgaben zur Differentialrechnung III

9. Prüfen Sie folgende Preis-Absatz-Funktion auf Monotonie: $y = p(x) = \frac{1}{\frac{x+3}{100}}$. Zeichnen Sie den Graphen in ein Koordinatensystem.

10. Zeichnen Sie den Graphen der Funktionen $y_1 = \frac{1}{4}x^5$ bzw. $y_2 = \frac{1}{5}x^6$ und prüfen Sie, ob an der Stelle $x = x_0 = 0$ bzw. $x = x_0 = 0$ ein Sattelpunkt bzw. Extremwert vorliegt.

11. Führen Sie für folgende Funktionen eine Kurvendiskussion durch:

$$y = f(x) = x^4 - 2x^3,$$

$$y = f(x) = \frac{x^2 - 1}{x + 1},$$

$$y = f(x) = \frac{\exp(x)}{\exp(x) + \exp(-x)}$$

$$y = f(x) = \ln\left(\frac{1}{\exp(x^2 + 1)}\right)$$

Aufgaben zur Differentialrechnung IV

12. Berechnen Sie alle partiellen Ableitungen 1. und 2. Ordnung für folgende Funktionen:

$$z = f(x,y) = x^5 - x^4 + x^3 + \exp(xy),$$
$$z = f(x,y) = y^5 - (xy)^4 + x^3 + \ln(xy),$$
$$z = f(v,w) = \exp(v + 1/w).$$

Lösungen zur Differentialrechnung

1. $\frac{K_1(4)-K_1(2)}{4-2} = \frac{8-4}{2} = 2$ und $\frac{K_2(4)-K_2(2)}{4-2} = \frac{128-16}{2} = 56.$

2. $K_1'(x) = 2$ und $K_2'(x) = 6x^2$. Also $K_1'(2) = 2$ und $K_2'(24)$.

3. f diff'bar nur an Stelle -2.

4. $4x^3$, $1/3\,x^{-2/3}$, $-4\,x^{-5}$, $16x^3$, 0, $1/4\,x^{-3/4}$.

5. $4x^3 + 2x^2$, $1/3\,x^{-2/3} - 12\,x + e^x$, $-4\,x^{-5} - 4\,x^{-2}$, $16\,x^3 + 9\,x^2$.

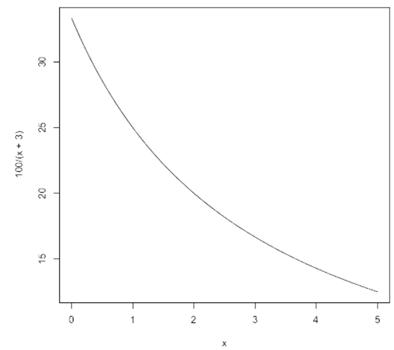
6. 1, $\frac{x^2\left(x^4+4\,x-3\right)}{\left(x^3+1\right)^2}$, 0, $\frac{x^7+4\,x^4\ln(x)+e^x x^4+xe^x\ln(x)-x^4-3\,e^x x^3-e^x}{\left(x^3+\ln(x)\right)^2 x}$.

7. $\frac{4\,x^3+3\,x^2}{2\sqrt{x^4+x^3}}$, $\frac{12\,x+e^x}{\left(6\,x^2+e^x\right)\ln(2)}$, $2\,\left(x^{-4}+4\,x^{-1}\right)\left(-4\,x^{-5}-4\,x^{-2}\right)$, $\left(16\,x^3+9\,x^2\right)e^{4\,x^4+3\,x^3}$.

8. $12x^2 + 6x$, $-2/9\,x^{-5/3} - 12 + e^x$, $20\,x^{-6} + 8\,x^{-3}$, $48\,x^2 + 18\,x$.

Lösungen zur Differentialrechnung

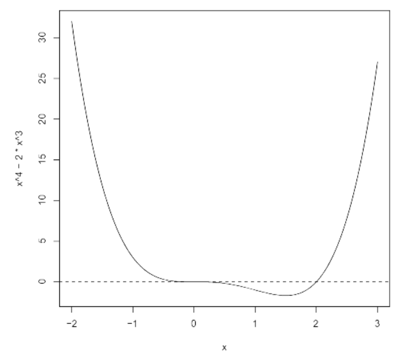
9. Graph der Preis-Absatz-Funktion:



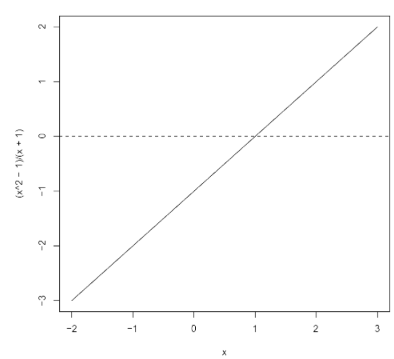
10. Es liegt Sattelpunkt bzw. Minimum vor.

Lösungen zur Differentialrechnung

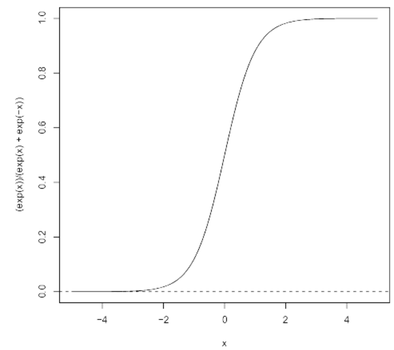
11. Graph der 1. Funktion:



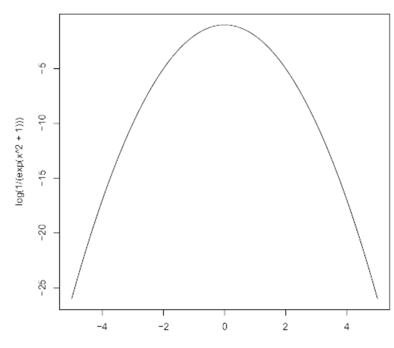
Graph der 2. Funktion: Zuerst Umformen ergibt Gerade !!!!



11. Graph der 3. Funktion:



Graph der 4. Funktion: Zuerst Umformen ergibt Parabel !!!!!



Lösungen zur Differentialrechnung

12. Die partiellen Ableitungen lauten wie folgt:

$$\frac{\partial f}{\partial x} =, \frac{\partial f}{\partial y} =, \frac{\partial f}{\partial x \partial y} =, \frac{\partial f}{\partial^2 x} =, \frac{\partial f}{\partial^2 x} =$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} =, \frac{\partial f}{\partial y} =, \frac{\partial f}{\partial x \partial y} =, \frac{\partial f}{\partial^2 x} =, \frac{\partial f}{\partial^2 x} =$$

$$\frac{\partial f}{\partial v} =, \frac{\partial f}{\partial w} =, \frac{\partial f}{\partial v \partial w} =, \frac{\partial f}{\partial^2 v} =, \frac{\partial f}{\partial^2 w} =$$

Aufgaben zur Integralrechnung I

1. Berechnen Sie die Integrale der folgenden Funktionen:

$$\int x^4\,dx, \qquad \int 4x^4\,dx, \qquad \int e^x\,dx, \qquad \int 4^x\,dx, \qquad \int 1^x\,dx.$$

2. Berechnen Sie die Integrale der folgenden Funktionen:

$$\int_1^2 x^4\,dx, \qquad \int_0^1 4e^x\,dx, \qquad \int_0^3 4^x\,dx, \qquad \int_0^1 x^2\,dx, \qquad \int_{-1}^1 x^2\,dx.$$

3. Berechnen Sie die Integrale der folgenden Funktionen:

$$\int 44\,dx, \qquad \int x\,dx, \qquad \int 1/x\,dx, \qquad \int -1/x\,dx, \qquad \int 0\,dx.$$

Aufgaben zur Integralrechnung II

4. Berechnen Sie die Integrale der folgenden Funktionen:

$$\int 4x\,dx, \quad \int 4x+3\,dx, \quad \int x^2+e^x\,dx, \quad \int 2^x-4^x\,dx, \quad \int e^x-x\,dx.$$

5. Berechnen Sie die Integrale der folgenden Funktionen:

$$\int e^x{\cdot}x\,dx, \quad \int x^4{\cdot}\log_2(x)\,dx, \quad \int (x{+}2)^4\,dx, \quad \int \sqrt{x+1}\,dx, \quad \int \frac{\log_2(x)}{x}\,dx.$$

6. Berechnen Sie den Gleichgewichtspreis sowie die anfallenden Produzenten- und Konsumentenrenten für die Angebotsfunktion $p(x) = x + 40$ sowie die Nachfragefunktion $p(x) = -3x + 80$.

7. Ermitteln Sie die Gesamterlösfunktion aus der Grenzerlösfunktion $U'(x) = 20 - 0.004x$.

Lösungen zur Integralrechnung

1. $x^5/5 + C$, $4x^5/5 + C$, $e^x + C$, $4^x/\ln(4) + C$, $x + C$.
2. $31/5$, $4/5$, $63/(2\ln(2))$, $1/3$, $2/3$.
3. $44x + C$, $0.5x^2 + C$, $\ln(x) + C$, $-\ln(x) + C$, $0 + C$.
4. $2x^2 + C$, $2x^2 + 3x + C$, $x^3/3 + e^x + C$, $2^x/\ln(2) - 4^x/\ln(4) + C$, $e^x - 0.5x^2 + C$.
5. $xe^x - e^x + C$, $\frac{5x^5\ln(x) - x^5}{25\ln(2)}$, $1/5(x+2)^5 + C$, $2/3(x+1)^{3/2} + C$, $0.5\frac{\ln(x^2)}{\ln(2)} + C$.
6. $x = 10$, $PR =$, $KR =$.
7. $U(x) = 20x - 0.002x^2$.

Aufgaben zur Matrizenrechnung

Betrachten Sie folgende Matrizen

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 4 & 6 & 0 \\ 8 & 10 & 1 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 5 \end{bmatrix}$$

1. Bestimmen Sie $A \cdot B$, $A^T + B$, $(B^T - B) \cdot A$, $4 \cdot B$ bzw. $B \cdot C$.

2. Welche der obigen Matrizen ist symmetrisch, welche quadratisch, welche eine Dreiecksmatrix?

3. Bestimmen Sie die Inverse der obigen Matrizen.

4. Überprüfen Sie, ob die Spaltenvektoren der Matrix B linear unabhängig sind.

5. Bestimmen Sie jeweils den Rang der obigen Matrizen.

Lösungen zur Matrizenrechnung I

1. Bestimmen Sie $A \cdot B$, $A^T + B$, $(B^T - B) \cdot A$, $4 \cdot B$ bzw. $B \cdot C$.

$$A \cdot B = \begin{bmatrix} 4 & 4 & 0 \\ 16 & 24 & 0 \\ 64 & 80 & 8 \end{bmatrix}, \quad A^T + B = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 0 \\ 4 & 10 & 0 \\ 8 & 10 & 9 \end{bmatrix},$$

$$(B^T - B) \cdot A = \begin{bmatrix} 0 & 8 & 64 \\ -4 & 0 & 80 \\ -16 & -40 & 0 \end{bmatrix}, \quad 4 \cdot B = \begin{bmatrix} 8 & 8 & 0 \\ 16 & 24 & 0 \\ 32 & 40 & 4 \end{bmatrix}$$

$$B \cdot C = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 2 \\ 10 & 4 & 4 \\ 18 & 9 & 13 \end{bmatrix}$$

2. B symmetrisch, alle quadratisch, B (untere) Dreiecksmatrix.

Lösungen zur Matrizenrechnung II

3. Inverse:

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 0.5 & 0 & 0 \\ 0 & 0.25 & 0 \\ 0 & 0 & 0.125 \end{bmatrix}, \quad B^{-1} = \begin{bmatrix} 1.5 & -0.5 & 0 \\ -1 & 0.5 & 0 \\ -2 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$C^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1.25 & -1.25 & -0.25 \\ -0.25 & 0.25 & 0.25 \end{bmatrix}$$

4. Ja, siehe Vorlesung.

5. Rang(A)=3, Rang(B)=3, Rang(C)=3.

Aufgaben zu linearen Gleichungssystemen I

1. Ermitteln Sie die Lösung der nachfolgenden Gleichungssystem grafisch und rechnerisch

$$(i)\quad \begin{array}{l} x_1 + x_2 = 10 \\ 2x_1 + 3x_2 = 26 \end{array}, \qquad (ii)\quad \begin{array}{l} x_1 + x_2 = 10 \\ -2x_1 - 2x_2 = -20 \end{array}, \qquad (iii)\quad \begin{array}{l} x_1 + x_2 = 12 \\ 2x_1 + 2x_2 = 5 \end{array}$$

2. Untersuchen Sie die Lösbarkeit der nachfolgenden Gleichungssystemen

$$(i)\quad \begin{array}{l} x_1 + x_2 + x_3 = 3 \\ 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 9 \\ x_1 - x_3 = 0 \end{array}, \qquad (ii)\quad \begin{array}{l} x_1 + x_2 + x_3 = 3 \\ x_1 - 2x_2 + x_3 = 0 \\ 2x_1 - 3x_2 + 4x_3 = 3 \end{array},$$

$$(iii)\quad \begin{array}{l} x_1 + x_2 + x_3 = 2 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 4 \\ -2x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 1 \end{array}, \qquad (iv)\quad \begin{array}{l} x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ 2x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 0 \\ 3x_1 - 2x_2 - 2x_3 = 0 \end{array},$$

Aufgaben zu linearen Gleichungssystemen II

3. Lösen Sie das nachfolgende Gleichungssystem mit Hilfe der Inversen.

$$\begin{array}{l} x_1 + x_2 + x_3 = 2 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 3 \\ -2x_1 - 2x_2 + x_3 = -1 \end{array} ,$$

4. Lösen Sie das nachfolgende Gleichungssystem mit Hilfe des Gauß'schen Eliminationsverfahrens.

$$\begin{array}{l} -x_1 - x_2 + 3x_3 = 6 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 3 \\ -2x_1 - 3x_2 - 4x_3 = -9 \\ 4x_1 + 2x_2 + x_3 = 0 \end{array} ,$$

Aufgaben zu linearen Gleichungssystemen III

5. Lösen Sie das nachfolgende Gleichungssystem mit Hilfe des Gauß'schen Algorithmus.

$$\begin{array}{l} -x_1 - x_2 + 3x_3 = 6 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 3 \\ -2x_1 - 3x_2 - 4x_3 = -9 \\ 4x_1 + 2x_2 + x_3 = 0 \end{array},$$

Lösungen zu den Aufgaben zu linearen Gleichungssystemen

1. $(i) \quad x_1 = 4, x_2 = 6$, (ii) unendlich viele Lösungen bzw. (iii) keine Lösung.

2. $(i) \quad x_1 = 1, x_2 = 1, x_1 = 1$, $(ii) \quad x_1 = 1, x_2 = 1, x_1 = 1$, $(iii) \quad x_1 = 0, x_2 = 1, x_1 = 1$, (iv) keine eindeutige Lösbarkeit.

3. $x_1 = 1, x_2 = 0, x_3 = 1$

4. $x_1 = -1, x_2 = 1, x_3 = 2$

5. $x_1 = -1, x_2 = 1, x_3 = 2$

Aufgaben zur Linearen Optimierung

1. Lösen Sie das nachfolgende Optimierungsproblem grafisch:

$$z = f(x_1, x_2) = 10x_1 + 10x_2 \longrightarrow \max,$$

$$\begin{gathered} 4x_1 + 4x_2 \leq 16, \\ 3x_1 \leq 6, \\ 4x_2 \leq 8, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0. \end{gathered}$$

2. Lösen Sie das Optimierungsproblem der letzten Aufgabe mit Hilfe des Simplexalgorithmus.

Lösungen zu den Aufgaben zur Linearen Optimierung

1/2. Das Optimum wird für $x_1 = x_2 = 2$ angenommen und hat den Wert 40.