Mathematik für Wirtschaftswissenschaftler

an der
Fachhochschule Heilbronn
im
Wintersemester 2002/2003

Dr. Matthias Fischer

Friedrich-Alexander-Universität Erlangen-Nürnberg
Lehrstuhl für Statistik und Ökonometrie
Lange Gasse 20
90403 Nürnberg
Email: matthias.fischer@wiso.uni-erlangen.de

07.10.2002

Organisatorisches

1. *Veranstaltung*: F403 Mathematik für Wirtschaftswissenschaftler

2. *Raum*: C133.

3. *Zeit*: 09:45 bis 11:15 Uhr und 11:30 bis 13:00 Uhr.

4. *Klausur*: 120 Minuten, unmittelbar nach Semesterende.

5. *Alte Klausuren*: Download von der Homepage

   http://mitarbeiter.fh-heilbronn.de/∼sauerb/lehre.htm

   Benutzername: `student`
   Passwort:

Skript & Literatur

Skript zur Veranstaltung

- Ritz, Harald: **Mathematik für Wirtschaftswissenschaftler**.
  Ansorge, Reinhard: **Ergänzung des Skriptes: Kapitel 5**.

Literatur zur Veranstaltung

- Grosser, Rudolf: **Wirtschaftsmathematik an Fachhochschulen**. Verlag Harri Deutsch; Thun/Frankfurt a.M. (1983), 485 S., ISBN 3-87144-677-7, 17.38 Euro.

- Bücker, Rüdiger: **Mathematik für Wirtschaftswissenschaftler**. Oldenbourg-Verlag, München (1998), 563 S., ISBN 3-486-24752-2, 34.80 Euro.

Literatur zur Finanzmathematik

- Pfeifer, Andreas: **Praktische Finanzmathematik** - mit Anhang und Diskette für Excel. Verlag Harri Deutsch; Thun / Frankfurt a. M. (2000), 320 S., ISBN 3-8171-1625-x, 24.80 Euro.

- Bosch, Karl: **Finanzmathematik**. Oldenbourg-Verlag; München (2002), 222S., ISBN 3-486-25906-7, 29.80 Euro.

Praxisrelevante Problemstellungen I

- **Beispiel 1.1.1**: Funktionen

  Ein Artikel wird mit festen Kosten von 100 EURO und variablen Kosten von 25 EURO/Stück produziert. Der Verkaufspreis beträgt 45 EURO. Bestimmen Sie die Kosten- und Erlösfunktion. Welche Stückzahl müssen Sie mindestens absetzen, um in den Gewinnbereich zu kommen?

- **Beispiel 1.1.2**: Differentialrechnung

  Als Verantwortlicher für den Absatz eines Produktes in einem Unternehmen plane Sie eine Preisänderung. Von Interesse ist nunmehr, um wieviel sich die (relative) Nachfrage hierdurch ändert. Bestimmt werden soll also die sog. Preiselastizität der Nachfrage (=relative Mengenänderung bezogen auf relative Mengenänderung). Die Preis-Absatz-Funktion sei $p(x) = 20 - 4x$.

Praxisrelevante Problemstellungen II

- **Beispiel 1.1.3**: Nichtlineare Optimierung

  Ein Betrieb, der zwei verschiedene Erzeugnisse $(E1, E2)$ herstellt, will seinen Gewinn maximieren. Der Gewinn je Erzeugnis beträgt pro Stück $(20, 30)$ EURO. Zur Produktion der beiden Erzeugnisse werden drei Rohstoffe $(R1, R2, R3)$ verwendet, die nur in beschränktem Umfang zur Verfügung stehen, nämlich $(32, 20, 24)$ ME (=Mengeneinheiten). Um eine ME von $E1$ zu produzieren, benötigt man 4 ME von $R1$ und 4 ME von $R2$. Zur Produktion einer ME von $E2$ benötigt man 8 ME von $R1$, 2 ME von $R2$ und 8 ME von $R3$.

- **Beispiel 1.1.4**: Zinsrechnung

  Sie wollen 1000 EURO für zwei Jahre anlegen. Drei Banken unterbreiten Ihnen folgende Angebote: Angebot $B1$ weist 4% Zinsen im ersten und 4% Zinsen im zweiten Jahr auf. Bank $B2$ offeriert Ihnen im ersten Jahr nur 3%, dafür im zweiten Jahr 5%. Bank $B3$ hingegen bietet Ihnen 5% im ersten, 3% im zweiten Jahr. Welches Angebot sollten Sie wählen, wenn bei allen drei Banken die Zinsen des ersten Jahres im zweiten Jahr mitverzinst werden?

Praxisrelevante Problemstellungen III

- **Beispiel 1.1.6**: Rentenrechnung

  Sie haben zu Ihrem 25. Geburtstag auf Ihrem Sparbuch 25.000 EURO bis zum 60-ten Geburtstag zu einem festen Zinssatz angelegt. Danach heben Sie am Anfang jeden Monats 200 EURO ab (d.h. Sie erhalten eine Rente von 200 EURO). Wie lange können Sie diesen Betrag abheben, bis das ganze Kapital aufgebraucht ist?

- **Beispiel 1.1.7**: Tilgungsrechnung

  Nach erfolgreichem Abschluß Ihres Studiums wollen Sie eine Eigentumswohnung kaufen. Hierfür nehmen Sie ein Darlehen von 100.000 EURO auf zum 6% Verzinsung auf. Die Rückzahlung erfolgt durch monatliche Raten (Zins und Tilgung) von 1.000 EURO. Wann haben Sie das Darlehen komplett zurückgezahlt?

Gliederung der Veranstaltung

2. Elementare Grundlagen der Mathematik
3. Funktionen
4. Folgen, Reihen, Grenzwerte und Stetigkeit
5. Finanzmathematik
6. Differentialrechnung
7. Integralrechnung
8. Matrizenrechnung
9. Lineare Gleichungssysteme
10. Lineare Optimierung

Zeitplan der Veranstaltung

1	07. Okt 02	Grundlagen I
2	14. Okt 02	Grundlagen II + Funktion I
3	21. Okt 02	Funktionen II
4	28. Okt 02	Folgen, Reihen, Grenzwerte und Stetigkeit
5	04. Nov 02	Finanzmathematik I
6	11. Nov 02	Finanzmathematik II
7	18. Nov 02	Differentialrechnung I
8	25. Nov 02	Differentialrechnung II
9	02. Dez 02	Integralrechnung
10	09. Dez 02	Matrizenrechnung
11	16. Dez 02	Lineare Gleichungssystem
-	23. Dez 02	Weihnachten
-	30. Dez 02	Weihnachten
-	06. Jan 03	Feiertag
12	13. Jan 03	Lineare Optimierung
13	20. Jan 03	Klausuraufgaben und Fragestunde
-	27. Jan 03	KLAUSUR

Allgemeine Hinweise zur Veranstaltung

- Skript/Folien dienen als nur Grundlage des Kurses
- Zur Vertiefung des Stoffes werden die angegebenen Bücher empfohlen.
- Beachte: Notationen in Büchern u.U. verschieden.
- In Klausur gelten die Notationen des Skriptes bzw. der Folien.
- Alleiniges Studiums des Skriptes kann Besuch der Vorlesung nicht ersetzen.
- In der Veranstaltung werden Aufgaben gerechnet.

Kapitel 2: Elementare Grundlagen der Mathematik

1. Zahlenbereiche und arithmetische Grundlagen

2. Aussagenlogik

3. Mengenlehre

4. Gleichungen

5. Ungleichungen

2.1.1 Aufbau der Zahlenbereiche und Grundrechenarten

- Zahlensystem: Additionssystem versus Positionssystem
- Dekadisches System
- Grundrechenarten

Operation	1.Operand a	Op.	2.Operand b	Formal	Ergebnis
Addition	1.Summand	$+$	2.Summand	$a + b = c$	Summe
Subtraktion	Minuend	-	Subtrahend	$a - b = c$	Differenz
Multiplikation	1. Faktor	$\cdot$	2. Faktor	$a \cdot b = c$	Produkt
Division	Zähler	:	Nenner	$a : b = c$	Quotient

- Zahlen

Abkürzung	Elemente	Bezeichnung	Operationen
$\mathbb{N}$	$1, 2, 3, \ldots$	natürliche Zahlen	$+, *, [-, /]$
$\mathbb{N}_0$	$0, 1, 2, \ldots$	natürliche Zahlen und Null	$+, *, [-, /]$
$\mathbb{Z}$	$\ldots, -1, 0, 1, \ldots$	ganze Zahlen	$+, -, *, [/]$
$\mathbb{Q}$	$\frac{2}{3}, \frac{-1}{4}$	rationale Zahlen	$+, -, *, /$
$\mathbb{R}$	$\pi, e, \sqrt{2}$	reelle Zahlen	$+, -, *, /$

2.1.2 Rechnen mit ganzen Zahlen I

- Regeln für Multiplikation und Division

$$\boxed{\begin{array}{ccc} -\cdot- = +\cdot+ = + & \text{und} & -\cdot+ = +\cdot- = - \\ -:- = +:+ = + & \text{und} & -:+ = +:- = - \end{array}}$$

- Regeln für Addition und Subtraktion

1. Zwei gleiche Zeichen hintereinander ergeben "+".
2. Zwei ungleiche Zeichen hintereinander ergeben "-".
3. Überflüssige "+"-Zeichen können weggelassen werden.

- Regeln zum Rechnen mit Klammern

1. Klammer- vor Punkt- vor Strichrechnung.
2. Eine Klammer, vor der ein Pluszeichen steht, kann man einfach weglassen.
3. Löst man eine Klammer auf, vor der ein Minuszeichen steht, muß man alle Plus- und Minuszeichen in der Klammer umkehren.

2.1.2 Rechnen mit ganzen Zahlen II

- Regeln zum Rechnen mit Klammern (Fortsetzung)

4. Gleichnamige Terme werden addiert (subtrahiert), indem man ihre Koeffizienten addiert (subtrahiert).
5. Man multipliziert eine Zahl (oder eine Variable) mit einer in einer Klammer stehenden Summe, indem man die Zahl (oder die Variable) mit jedem Summanden multipliziert und die Produkte addiert.
6. Man multipliziert zwei in Klammern stehende Summen, indem man jeden Summanden der ersten Summe mit jedem Summanden der zweiten Summe multipliziert.

- Gesetze für das Rechnen mit ganzen Zahlen

Bezeichnung	Formel
Assoziativgesetz der Addition	$a + (b + c) = (a + b) + c$
Assoziativgesetz der Multiplikation	$a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$
Kommutativgesetz der Addition	$a + b = b + a$
Kommutativgesetz der Multiplikation	$a \cdot b = b \cdot a$
Distributivgesetz	$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$

2.1.3 Rechnen mit rationalen Zahlen (Brüchen)

1. Man verändert den Wert eines Bruches nicht, wenn man Zähler und Nenner
   - mit der gleichen Zahl multipliziert (=**erweitert**),
   - durch die gleichen Zahl dividiert (=**kürzt**).

2. Man multipliziert Brüche, indem man Zähler mit Zähler und Nenner mit Nenner multipliziert.

3. Man dividiert durch einen Bruch, indem man mit seinem Kehrwert multipliziert.

4. Man addiert (bzw. subtrahiert) gleichnamige Brüche, indem man die Zähler addiert (bzw. subtrahiert) und den Nenner beibehält.

5. Achtung: Ungleichnamige Brüche müssen zuerst durch Erweitern gleichnamig gemacht werden!

2.1.4 Rechnen mit Näherungswerten

- Verwende Symbol $\approx$ für gerundete Werte.
- Rundungsregeln: Aufrunden ab "5":

2.1.5 Potenzen: Definition

- Unter einer Potenz mit Basis $a \in \mathbb{R}$ und Exponent $n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$, kurz a^n, versteht man das Produkt aus n Faktoren:

$$a^n = \underbrace{a \cdot \ldots \cdot a}_{n-mal}.$$

- Es gilt weiterhin:

$$a^1 = a \text{ für alle } a \in \mathbb{R}$$
$$a^0 = 1 \text{ für alle } a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$$
$$a^{-n} = \frac{1}{a^n} \text{ für alle } a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

2.1.5 Potenzen: Rechenregeln

1. Potenzen mit gleicher Basis und gleichem Exponenten werden addiert (subtrahiert), indem man ihre Koeffizienten addiert (subtrahiert): $2a^n + 3a^n = 5a^n$.

2. Potenzen mit gleicher Basis werden
   - multipliziert, indem die Basis mit der Summe der Exponenten potenziert wird: $a^n \cdot a^m = a^{n+m}$.
   - dividiert, indem die Basis mit der Differenz der Exponenten potenziert wird: $\frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$.

3. Potenzen mit gleichem Exponenten werden
   - multipliziert, indem das Produkt der Basen mit dem gemeinsamen Exponenten potenziert wird: $a^n \cdot b^n = (a \cdot b)^n$.
   - dividiert, indem indem ihre Basen dividiert werden und der so erhaltene Quotient mit dem gemeinsamen Exponenten potenziert wird: dem gemeinsamen Exponenten potenziert wird: $\frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n$.

4. Potenzen werden potenziert, indem die Basis mit dem Produkt der Exponenten potenziert wird: $(a^n)^m = a^{m \cdot n}$.

2.1.6 Wurzeln

- Wurzelrechnung (auch Radizieren) ist die 1. Umkehrung des Potenzierens.

- Unter $\sqrt[n]{b}$ mit $b \geq 0$ und $n \in \mathbb{N}$ ist diejenige Zahl a zu verstehen, für die gilt: $a^n = b$. Man nennt a auch n-te Wurzel aus b.

- Für alle $b > 0$, $n \in \mathbb{N}, m \in \mathbb{Z}$ gilt:

$$\sqrt[n]{b^m} = (b^m)^{\frac{1}{n}} = b^{\frac{m}{n}}$$

  b heißt eine Potenz mit rationalem Exponenten.

- Es gelten die analogen Regeln zu den Potenzen:

  $2\sqrt[n]{a} + 3\sqrt[n]{a} = 5\sqrt[n]{a}$.
  $\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[m]{a} = a^{1/n+1/m}$.
  $\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[m]{a}} = a^{1/n-1/m}$.
  $\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a \cdot b}$ und $\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}$.
  $\sqrt[m]{(\sqrt[n]{a})} = \sqrt[m \cdot n]{a}$.

2.1.7 Logarithmus: Definition

- Logarithmieren ist die 2. Umkehrung des Potenzierens:
  Bekannt: Potenzwert b und Basis a.
  Gesucht: Exponent.

- Unter dem Logarithmus von $b > 0$ zur Basis $a > 0, a \neq 1$ versteht man diejenige reelle Zahl n, für die gilt:
$$a^n = b.$$
  Schreibweise: $n = \log_a b$.

- Wahl der Basis
  - Bei einer Basis $a = 10$ spricht man vom Dekadischer oder Zehnerlogarithmus:
$$\log_{10} b = \log b.$$
  - Bei einer Basis $a = e$ spricht man vom natürlichen Logarithmus:
$$\log_e b = \ln b.$$

2.1.7 Logarithmus: Rechenregeln

1. Ein Produkt wird logarithmiert, indem die Logarithmen der einzelnen Faktoren addiert werden:
$$\log_a(b_1 \cdot b_2) = \log_a b_1 + \log_a b_2.$$

2. Ein Quotient wird logarithmiert, indem die Logarithmen von Zähler und Nenner subtrahiert werden:
$$\log_a \frac{b_1}{b_2} = \log_a b_1 - \log_a b_2.$$

3. Eine Potenz wird logarithmiert, indem der Logarithmus der Basis mit dem Exponenten multipliziert wird:
$$\log_a b^r = r \log_a b.$$

4. Eine Wurzel wird logarithmiert, indem der Logarithmus des Radikanten durch den Wurzelexponenten dividiert wird: $\log_a \sqrt[n]{b} = \frac{\log_a b}{n}$.

2.1.8 (Absolut-)Betrag

- Für jede reelle Zahl a ist der absolute Betrag oder Absolutbetrag definiert durch diejenige nichtnegative Zahl, für die gilt:

$$|a| = \begin{cases} a & \text{für } a \geq 0 \\ -a & \text{für } a < 0 \end{cases} .$$

- Geometrische Interpretation des Betrages:
  - Betrag von a als Abstand der Zahl a von der Zahl 0.
  - Abstand zweier beliebiger Zahlen ist nichts anderes als der Betrag der Differenz der beiden Zahlen.

2.1.9 Summenzeichen

- Die n Zahlen $a_1, \ldots, a_n$ sollen aufaddiert werden. Als Kurzschreibweise für die Summe ergibt sich mit Hilfe des Summenzeichens

$$S = a_1 + a_2 + \ldots + a_n = \sum_{i=1}^{n} a_i$$

(" Die Summe über a_i für i gleich 1 bis n")

- Rechenregeln für das Summenzeichen

$$\sum_{i=1}^{n}(c \cdot a_i) = c \cdot \sum_{i=1}^{n} a_i \quad \text{und} \quad \sum_{i=1}^{n}(a_i + b_i) = \sum_{i=1}^{n} a_i + \sum_{i=1}^{n} b_i$$

$$\sum_{i=1}^{n} a_i = \sum_{i=1+c}^{n+c} a_{i-c} \quad \text{und} \quad \sum_{i=1}^{n} i = \frac{1}{2} \cdot n \cdot (n+1)$$

2.1.9 Produktzeichen

- Die n Zahlen $a_1, \ldots, a_n$ sollen multipliziert werden. Als Kurzschreibweise für das Produkt ergibt sich mit Hilfe des Produktzeichens

$$P = a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_n = \prod_{i=1}^{n} a_i$$

("Das Produkt über a_i für i gleich 1 bis n")

- Rechenregeln für das Produktzeichen

$$\prod_{i=1}^{n} (c \cdot a_i) = c^n \cdot \prod_{i=1}^{n} a_i \quad \text{und} \quad \prod_{i=1}^{n} (a_i \cdot b_i) = \prod_{i=1}^{n} a_i \cdot \prod_{i=1}^{n} b_i$$

$$\prod_{i=1}^{n} a_i = \prod_{i=1+c}^{n+c} a_{i-c}$$

2.1.10 Fakultät

- Das Produkt der ersten n natürlichen Zahlen wird abgekürzt geschrieben durch

$$1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot n = \prod_{i=1}^{n} i = n!$$

  Die Schreibweise wird gelesen: n-Fakultät.

- Es gilt weiterhin: $0! = 1$.

2.1.11 Prozentrechnung

- Praxisrelevante Problemstellungen:
  - "Um wieviel Prozent konnte der Umsatz gesteigert werden?"
  - "Produktionskosten müssen um 10% gesenkt werden."

- Der hundertste Teil einer Zahl a heißt ein Prozent von a. Man schreibt kurz 1%.

- Es bezeichne p den Prozentsatz und G den sog. Grundwert. Berechnung des

  1. Prozentwerts P ($=$ der Teil des Grundwertes, dem $p\%$ entsprechen):

$$P = \frac{p \cdot G}{100}.$$

  2. Berechnung des Prozentsatzes: $p = \frac{P \cdot 100}{G}$.

  3. Berechnung des Grundwertes $G = \frac{P \cdot 100}{p}$.

2.1.12 Binomialkoeffizienten: Motivation I

- Ableitung des Binomialkoeffizienten über sog. Pascal'sches Dreieck.

$$(a+b)^0 = \mathbf{1}$$

$$\begin{aligned}(a+b)^1 &= \mathbf{1}\cdot a + \mathbf{1}\cdot b\\ (a+b)^2 &= \mathbf{1}\cdot a^2 + \mathbf{2}\cdot a\cdot b + \mathbf{1}\cdot b^2\\ (a+b)^3 &= \mathbf{1}\cdot a^3 + \mathbf{3}\cdot a\cdot b^2 + \mathbf{3}\cdot a^2\cdot b + \mathbf{1}\cdot b^3\end{aligned}$$

Gesucht: Allgemeines Gesetz für $(a+b)^n$.

- Lösung erfolgt mit Hilfe des sogenannten Binomialkoeffizienten.

2.1.12 Binomialkoeffizienten: Definition

- Sei $n \in N_0$ und $k \in N_0$ mit $n \geq k$. Dann gilt (" n über k"):

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!} = \frac{n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot (n-k+1)}{k!}$$

- Für $n \geq k$ und $k = 0$ bzw. $k = n$ gilt:

$$\binom{n}{0} = 1, \quad \binom{n}{n} = 1$$

- Weiter gelten folgende Rechenregeln:

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k} \quad \text{und} \quad \binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} = \binom{n+1}{k}.$$

2.1.12 Binomialkoeffizienten: Motivation II

- Ableitung des Binomialkoeffizienten über sog. Pascal'sches Dreieck.

$$(a+b)^0 = \mathbf{1}$$

$$(a+b)^1 = \mathbf{1} \cdot a + \mathbf{1} \cdot b$$
$$(a+b)^2 = \mathbf{1} \cdot a^2 + \mathbf{2} \cdot a \cdot b + \mathbf{1} \cdot b^2$$
$$(a+b)^3 = \mathbf{1} \cdot a^3 + \mathbf{3} \cdot a \cdot b^2 + \mathbf{3} \cdot a^2 \cdot b + \mathbf{1} \cdot b^3$$

Das allgemeine Gesetz für $(a+b)^n$ lautet:

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k.$$

Kapitel 2: Elementare Grundlagen der Mathematik

1. Zahlenbereiche und arithmetische Grundlagen $\surd$
2. Aussagenlogik
3. Mengenlehre
4. Gleichungen
5. Ungleichungen

2.2.1 Aussage und Variablen

- Eine Aussage ist eine gedankliche Widerspiegelung eines Sachverhalts.
  $\rightarrow$ Aussagen sind entweder WAHR oder FALSCH.
  $\rightarrow$ Bezeichnung mit Großbuchstaben $A, B, \ldots$

  Beispiel: A sei "*Alle Studenten lieben das Fach Mathematik*".

- $\overline{A}$ bezeichne die Negation der Aussage A. Sie ist wahr, wenn A falsch ist.

  Beispiel: $\overline{A}$ ist dann
  "*Es gibt mindestens einen Studenten, der das Fach Mathematik nicht mag*".

- Eine Variable (über einen Grundbereich) ist ein Symbol mit noch nicht festgelegter Bedeutung. Bezeichnung durch Kleinbuchstaben $a, b, c, \ldots$.

2.2.1 Aussage, Variable und Aussageform

- Eine Aussageform enthält mindestens eine Variable.
  Beispiel: "b *ist ein Teiler von* 16".

- Erst Belegung der Variablen mit Definitionsmengen D macht Aussageform zur Aussage.
  Beispiel: "b *mit* $D(b) = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ *ist ein Teiler von* 16".

- Die Lösungsmenge L ist der Teil der Definitionsmenge D, der zu wahren Aussagen führt.
  Beispiel: $L(b) = \{1, 2, 4\}$.

- Quantifizierung einer Aussageform: Voranstellung der Wendungen

"*für alle*" [Symbol: "$\forall$"] oder "*es gibt mindestens ein*" [Symbol: "$\exists$"]

2.2.2 Verknüpfung von Aussagen

- Zwei oder mehrere Aussagen können verknüpft ("zusammengesetzt") werden.

- Häufig auftretende Verknüpfungen

Name	Schreibweise	gelesen
Konjunktion	$A \wedge B$	"A und B"
Disjunktion	$A \vee B$	"A oder B oder beide"
Implikation	$A \Rightarrow B$	"aus A folgt B"
Äquivalenz	$A \Leftrightarrow B$	"A genau dann, wenn B"

- Wahrheitstafel für obige Verknüpfungen

A	B	$A \wedge B$	$A \vee B$	$A \Rightarrow B$	$A \Leftrightarrow B$
w	w	w	w	w	w
w	f	f	w	f	f
f	w	f	w	w	f
f	f	f	f	w	w

- Regeln für die Auswertung: "von innen heraus".

Kapitel 2: Elementare Grundlagen der Mathematik

1. Zahlenbereiche und arithmetische Grundlagen $\surd$
2. Aussagenlogik $\surd$
3. Mengenlehre
4. Gleichungen
5. Ungleichungen

2.3.1 Mengenbegriff I

- Eine Menge ist eine Zusammenfassung bestimmter, wohlunterschiedener Objekte — welche auch Elemente genannt werden — zu einem Ganzen.

- Menge werden mit Großbuchstaben (z.B. A) bezeichnet, Elemente mit Kleinbuchstaben (z.B. a_1, a_2, a_3).

- Man unterscheidet zwei grundlegende Element-Mengen-Relationen:

$x \in A$ "x ist ein Element der Menge A"

$x \notin A$ "x ist kein Element der Menge A"

- Reihenfolge der Aufzählung der Elemente nicht entscheidend. Kein Element wiederholt sich.

2.3.1 Mengenbegriff II

- Arten der Mengenbildung:
  1. Aufzählung aller Elemente, z.B. $A = \{1, 2, 3, 4\}$.
  2. Angabe des jeweiligen Definitionsbereichs und einer die Menge A erzeugenden Aussageform:
  $$A = \{x | x \in D \wedge H(x)\}$$
  "*A ist die Menge aller x, für die gilt: x ist Element von D und H(x).*"

     Nach dem Mengenbildungsprinzip ist A eine eindeutige Menge.

     Beispiel: $A = \{x \in \mathbb{N} \quad \wedge \quad x < 5\}$. Hier ist $D(x) = \mathbb{N}$ und $H(x)$ die Aussageform "$x < 5$".

- Nullmenge, kurz $\emptyset$ oder $\{\,\}$: Die Menge, die kein Element besitzt.

- Potenzmenge von A, kurz $P(A)$: Die Menge aller Teilmengen.

2.3.2 Relationen (Beziehungen) zwischen Mengen

1. (Gleichheit): Zwei Mengen A und B sind genau dann gleich, wenn jedes Element aus A auch Element aus B ist und umgekehrt. In Mengennotation:

$$A = B \quad \Longleftrightarrow \quad \forall x : (x \in A \Leftrightarrow x \in B)$$

2. (Teilmenge): Die Mengen A heißt Teilmenge (Untermenge) der Menge B, wenn jedes Element aus A auch Element aus B ist.

$$A \subseteq B \quad \Longleftrightarrow \quad \forall x : (x \in A \Rightarrow x \in B)$$

3. (Echte Teilmenge): Die Mengen A heißt echte Teilmenge (Untermenge) der Menge B, wenn jedes Element aus A auch Element aus B ist und es ein Element aus B gibt, das nicht zu A gehört.

$$A \subset B \quad \Longleftrightarrow \quad (A \subseteq B \wedge A \neq B)$$

4. (Komplementäre Menge): $A = \{x | x \in D \wedge H(x)\} \longleftrightarrow \overline{A} = \{x | x \in D \wedge !H(x)\}$.

2.3.3 Mengenoperationen: Verknüpfung von Mengen

1. (Durchschnitt): Der Durchschnitt der Mengen A und B ist die Menge aller Elemente, die sowohl zu A als auch zu B gehören. In Mengenschreibweise:

$$A \cap B = \{x | x \in A \wedge x \in B\}$$

2. (Vereinigung): Die Vereinigung der Mengen A und B ist die Menge aller Elemente, die zu A oder zu B oder zu beiden gehören:

$$A \cup B = \{x | x \in A \vee x \in B\}$$

3. (Differenz): "A ohne B" ist die Menge aller Elemente von A, die nicht zugleich zu B gehören:

$$A \setminus B = \{x | x \in A \wedge x \notin B\}$$

4. (Produkt- bzw. Kreuzmenge): $A \times B$ ("A Kreuz B') ist die Menge aller geordneten Paare $(x_1; x_2)$ mit $x_1 \in A$ und $x_2 \in B$.

2.3.4 Mengenalgebra I

Es bezeichne G die Grundmenge mit Teilmengen A, B und C.

- Identitätsgesetze:

$$A \cup \emptyset = A, \qquad A \cap \emptyset = \emptyset,$$
$$A \cup G = G, \qquad A \cap G = A.$$

- Idempotenzgesetze:

$$A \cup A = A \cap A = A.$$

- Komplementgesetze:

$$A \cup \overline{A} = G, \qquad A \cap \overline{A} = \emptyset,$$

$$\overline{G} = \emptyset, \qquad \overline{\emptyset} = G, \qquad \overline{\overline{A}} = A.$$

- Gesetze von DeMorgan:

$$\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}, \qquad \overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$$

2.3.4 Mengenalgebra II

- Kommutativgesetze:

$$A \cup B = B \cup A, \qquad A \cap B = B \cap A.$$

- Assoziativgesetze:

$$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C, \qquad A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C.$$

- Distributivgesetze:

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C), \quad A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C).$$

- Verschmelzungsgesetze: $(A \cup B) \cap A = A, \qquad (A \cap B) \cup A = A.$

- Inklusionsgesetze: $A \subset (A \cup B), \qquad A \supset (A \cap B).$

2.3.4 Begriff der Abbildung

- Gegeben seien zwei Mengen A und B. Jede Teilmenge F der Produktmenge $A \times B$ heißt eine Abbildung aus A in B oder Abbildung von A nach B.

- Unter dem Vorbereich oder den Urbildern versteht man die Menge aller an erster Stelle stehenden Elemente der geordneten Paare.

  Unter dem Nachbereich oder den Bildern versteht man die Menge aller an zweiter Stelle stehenden Elemente der geordneten Paare.

- Spezielle Abbildungen
  - Eine Abbildung von A nach B heißt surjektiv, wenn jedes Bild mindestens ein Urbild hat.
  - Eine Abbildung von A nach B heißt injektiv, wenn jedes Urbild genau ein Bild besitzt.
  - Eine Abbildung von A nach B heißt bijektiv, wenn sie injektiv und surjektiv ist, d.h. jedes Urbild genau ein Bild und jedes Bild genau ein Urbild besitzt.

Kapitel 2: Elementare Grundlagen der Mathematik

1. Zahlenbereiche und arithmetische Grundlagen $\surd$
2. Aussagenlogik $\surd$
3. Mengenlehre $\surd$
4. Gleichungen
5. Ungleichungen

2.4.1 Arten von Gleichungen

- Terme T sind Zahlen- oder Variablenverknüpfungen, z.B. $\mathrm{T}_1 = 2x^2 + 2$.
- Werden zwei Terme durch Gleichheitszeichen verbunden, so heißt dieser Ausdruck eine Gleichung.
- Arten von Gleichungen

  1. Identitäten: $2 \cdot 2 = 4$.
  2. Funktionsgleichungen: $K = f(x)$.
  3. Bestimmungsgleichungen: $3x + 6 = 24 \rightarrow$ Aussageformen: Auflösen der Gleichung entspricht der Bestimmung der Lösungsmenge.
     Einteilung von Bestimmungsgleichung nach
     - Anzahl der Variablen.
     - Potenzen und Verknüpfung der Variablen
     - Wo erscheint Variable?

2.4.2 Lösen von Bestimmungsgleichungen I

- Ziel: Die Bestimmungsgleichung ist durch Anwendung geeigneter Rechenoperationen so umzuformen, daß die Variable alleine auf einer Seite des Gleichheitszeichens steht und somit die Lösung erkennbar ist.

- Empfehlung: Führe die Probe durch (=Einsetzen der Lösung)

- Mögliche Rechenoperationen, die die Lösungsmenge unverändert lassen:

  1. Vertauschen beider Seiten.
  2. Addition und Subtraktion der gleichen Zahlen auf beiden Seiten.
  3. Multiplikation mit und Subtraktion durch die gleiche Zahlen auf beiden Seiten.
  4. Potenzieren bzw. Radizieren beider Seiten mit dem gleichen Exponenten.
  5. Logarithmieren auf beiden Seiten (zur gleichen Basis)

- Empfohlene Vorgehensweise:

  1. Auflösen von Klammern und Brüchen.
  2. Zusammenfassung aller Variablen und Zahlen.
  3. Umformen mit dem Ziel, die gesuchte Variable zu separieren.

2.4.2 Lösen von Bestimmungsgleichungen II

- Lineare Gleichungen: Hier tritt die Variable nur in erster Potenz auf, z.B. $5x + 8 = 18$.

- Quadratische Gleichungen: Hier tritt eine Variable in zweiter Potenz auf, z.B. $x^2 = 4$.

  Lösung: Bringe die Gleichung auf die Form $x^2 + px + q = 0$ und verwende Lösungsformel
  $$x_{1/2} = -p/2 \pm \sqrt{(p/2)^2 - q}.$$

- Gleichungen höheren Grades: Hier tritt eine Variable in n-ter Potenz auf $(n > 2)$, z.B. $x^4 - 12x^2 + 11 = 0 \rightarrow$ Lösung solcher biquadratischer Gleichungen möglich.

- Exponentialgleichungen: Hier tritt die Variable mindestens einmal im Exponenten auf, z.B. $2^x = 3$.

- Wurzelgleichungen: Hier tritt die Variable mindestens einmal unter dem Wurzelzeichen auf, z.B. $\sqrt{x} + 2 = 4$.

2.4.2 Lösen von Bestimmungsgleichungen III

- Lineare Gleichungssysteme mit mehreren Variablen: Die Anzahl der Variablen entspricht der Anzahl der Gleichungen.

  Vorgehen zur Lösung:

  1. Umformen des Systems bis nur noch eine Gleichung mit einer Variable übrigbleibt, die dann bestimmt werden kann.
  2. Sukzessives Lösen der restlichen Variablen durch Einsetzen bereits bestimmter Lösungen.

  Alternative Lösungsverfahren:

  1. Additionsverfahren: Addition oder Subtraktion eines Vielfachens der einen Gleichung zur anderen eliminiert eine Variable.
  2. Einsetzungsverfahren: Auflösen einer Gleichung nach einer Variablen und Einsetzen des Ergebnisses in die andere Gleichung.
  3. Gleichsetzungsverfahren: Auflösen beider Gleichungen nach der gleichen Variable und Gleichsetzen der Ergebnisse.

Kapitel 2: Elementare Grundlagen der Mathematik

1. Zahlenbereiche und arithmetische Grundlagen $\surd$

2. Aussagenlogik $\surd$

3. Mengenlehre $\surd$

4. Gleichungen $\surd$

5. Ungleichungen

Ungleichungen

- Schreibt man zwischen zwei Terme eine größer- ("$>$") oder kleiner- ("$<$") Beziehung, spricht man von Ungleichungen. Ist auch der Grenzfall der Gleichheit zugelassen, schreibt man "$\geq$" bzw. "$\leq$".

  Beispiel: $4x \leq 6$.

- Mögliche Rechenoperationen, die die Lösungsmenge unverändert lassen:

  1. Addition und Subtraktion der gleichen Zahlen auf beiden Seiten.
  2. Multiplikation und Division mit gleicher $positiver$ Zahl auf beiden Seiten.
  3. ACHTUNG: Bei Multiplikation und Division mit der gleichen $negative$ Zahl muß das Vorzeichen vertauscht werden!!

Kapitel 3: Funktionen

1. Funktionsbegriff

2. Darstellungen von Funktionen

3. Begriffe und Bezeichnungen bei Funktionen

4. Eigenschaften von Funktionen

5. Elementare Funktionen

6. Funktionen mit mehreren unabhängigen Variablen

3.1 Funktionsbegriff

- (Mengentheoretische Definition) Eine Funktion ist eine eindeutige Abbildung zweier Mengen, d.h. eine gewisse Menge von geordneten Paaren $(x; y)$ mit der Eigenschaft, daß jedem x genau ein y zugeordnet ist.

- (Alternative Definition) Eine Funktion f ordnet jedem Elemente x aus einer Menge X eindeutig ein Element y aus einer Menge Y zu.
  - f als Zuordnungsvorschrift zwischen x und y.
  - y nennt man das Bild von x oder abhängige Variable oder als Funktionswert an der Stelle x.
  - x nennt man das Urbild von y oder unabhängige Variable oder das Argument von f.

- Definitionsbereich $D(f)$: Menge aller $x \in X$, denen ein Bild zugeordnet wird.

- Wertebereich $W(f)$: Menge aller $y \in Y$, die mindestens ein Urbild haben.

Kapitel 3: Funktionen

1. Funktionsbegriff $\surd$
2. Darstellungen von Funktionen
3. Begriffe und Bezeichnungen bei Funktionen
4. Eigenschaften von Funktionen
5. Elementare Funktionen
6. Funktionen mit mehreren unabhängigen Variablen

3.2.1 Analytische Darstellung

- Die analytische Darstellung einer Funktion erfolgt durch die Angabe

  1. des Definitionsbereichs $D(f)$ und
  2. der Funktionsgleichung $y = f(x)$.

  Beispiel: $D(f) = \{0, 1, 2, 3, 4\}$ und $y = f(x) = x^2$.

3.2.2 Wertetabelle

- Bei der tabellarischen Form in Form einer Wertetabelle werden für die unabhängige Variable bestimmte Werte vorgegeben (NUR ENDLICH VIELE!!) und aufgrund der Zuordnungsvorschrift der jeweils zugehörige Wert der abhängigen Variablen (=Funktionswert) ermittelt. Die berechneten Wertepaare werden dann in einer Tabelle aufgelistet.

Beispiel (Fortsetzung):

x	0	1	2	3	4
f(x)	0	1	4	9	16

3.2.3 Grafische Darstellung I

- Die grafische Darstellung erfolgt im kartesischen (rechtwinkligen) Koordinatensystem. Jedem Wertepaar (x, y) der Funktion wird eindeutig ein Punkt zugeordnet. Die Menge aller dieser Punkte liefert den Graphen der Funktion.

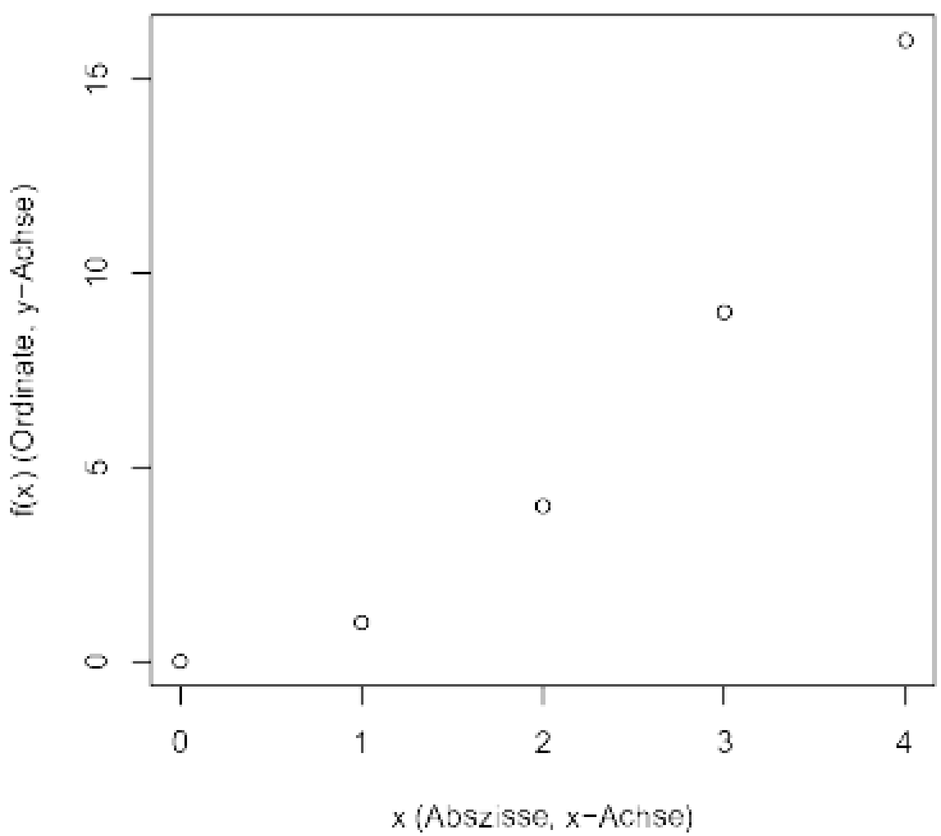
- Übliche Darstellung:
  - Die Werte der x-Variablen (d.h. der unabhängigen Variablen) werden auf der horizontalen Achse (auch: x-Achse oder Abszisse) abgetragen.
  - Die Werte der y-Variablen (d.h. der abhängigen Variablen) werden auf der vertikalen Achse (auch: y-Achse oder Ordinate) abgetragen.

- Darstellung einer Funktion ist nur für bestimmte Intervalle möglich!

- "Einheitskreis" als Beispiel für eine Kurve, die nicht das Bild einer Funktion ist.

3.2.3 Grafische Darstellung II

- **Beispiel** (Fortsetzung): Grafische Darstellung der Funktion $y = f(x) = x^2$.



Kapitel 3: Funktionen

1. Funktionsbegriff $\surd$
2. Darstellungen von Funktionen $\surd$
3. Begriffe und Bezeichnungen bei Funktionen
4. Eigenschaften von Funktionen
5. Elementare Funktionen
6. Funktionen mit mehreren unabhängigen Variablen

3.3.1 Steigung einer Funktion

- Die Steigung einer Funktion in einem Punkt ist gleich dem Tangens der Steigungswinkelgröße α ($0 \leq \alpha \leq 180$ Grad) einer Tangente in diesem Punkt:

$$\tan(\alpha) = \frac{\text{Länge der Gegenkathete}}{\text{Länge der Ankathete}}.$$

  Am einfachsten: Wähle für die Ankathete den Wert 1.

- Lineare Funktionen der Form $y = ax + b$, d.h. Geraden besitzen in jedem Punkt die gleiche Steigung a.

- Nichtlineare Funktionen weisen in ihrem Verlauf – d.h. in jedem Punkt – ständig wechselnde Steigungen auf.

- Parallelen zur x-Achse haben eine Steigung von 0.

- Für Parallelen zur y-Achse ist die Steigung nicht definiert ("ist unendlich").

3.3.2 Explizite und implizite Funktionen

- Tritt die abhängige Variable y in einer Funktionsgleichung auf einer Seite der Gleichung isoliert auf, ist die Funktion in explizier Form gegeben.

  Beispiel: $y = 3x + 2$.

- Im anderen Falle spricht man von der impliziten Form der Funktionsgleichung.

  Beispiel: $2y - 3x = 2$.

3.3.3 Verknüpfung von Funktionen

- Zwei Funktionen $f(x)$ und $g(x)$, deren Definitionsbereich $\mathbb{R}$ ist, können additiv oder multiplikativ verknüpft werden.

$$f(x) + g(x) = h_1(x); \qquad f(x) - g(x) = h_2(x)$$

$$f(x) \cdot g(x) = h_3(x); \qquad \frac{f(x)}{g(x)} = h_4(x), \text{ mit } g(x) \neq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

  Der Definitionsbereich der neuen Funktion $h(x)$ ist wiederum $\mathbb{R}$.

- Funktionen heißen verkettete bzw. mittelbare Funktionen, wenn zwei oder mehr Abbildungen nacheinander ausgeführt werden, um das Bild des Arguments zu erhalten:

  Aus $z = f(y)\, \forall y \in \mathbb{R}$ und $y = g(x)\, \forall y \in \mathbb{R}$ folgt $z = f(g(x))\, \forall y \in \mathbb{R}$.

- Beachte: Es muß immer gelten $W(q) \subseteq D(f)$. Andernfalls muß eine sinnvolle Restriktion für den Definitionsbereich $D(g)$ eingeführt werden.

3.3.4 Inverse einer Funktion

- Vertauscht man in einer Funktion $y = f(x)$ die Bedeutung von x und y, d.h. man bildet die Umkehrabbildung $x = f^{-1}(y)$ und ist diese Umkehrabbildung eindeutig, so ist sie wieder eine Funktion. In diesem Fall ist f eine bijektive Funktion und f^{-1} heißt inverse Funktion oder Umkehrfunktion von f.

- Umkehrbarkeitskriterium: Auf jeder Parallelen zur x-Achse liegen niemals mehrere Punkte des Grafen von f, d.h. zu verschiedenen Stellen der Funktion gehören stets auch verschiedene Funktionswerte.

- Praktische Schritte zur Bildung der inversen Funktion:

1. Löse $y = f(x)$ nach x auf.
2. Vertausche x und y. Es ergibt sich $y = f^{-1}(x)$.

- Geometrische Bedeutung: Vertauschen der beiden Koordinaten eines Punktes bedeutet Spiegeln aller Punkte an der Winkelhalbierenden (Gerade $y = x$).

Kapitel 3: Funktionen

1. Funktionsbegriff $\surd$
2. Darstellungen von Funktionen $\surd$
3. Begriffe und Bezeichnungen bei Funktionen $\surd$
4. Eigenschaften von Funktionen
5. Elementare Funktionen
6. Funktionen mit mehreren unabhängigen Variablen

3.4.1 Monotonieverhalten

- Eine Funktion $f(x)$ heißt im Intervall I monoton steigend, wenn

$$f(x_1) \leq f(x_2) \quad \forall x_1, x_2 \in I \text{ mit } x_1 < x_2.$$

- Eine Funktion $f(x)$ heißt im Intervall I monoton fallend, wenn

$$f(x_1) \geq f(x_2) \quad \forall x_1, x_2 \in I \text{ mit } x_1 < x_2.$$

- Gilt das Ungleichheitszeichen spricht man sogar von strenger Monotonie

- Lineare Funktionen weisen über ihren gesamten Definitionsbereich ein konstantes Monotonieverhalten auf. Besitzen Sie z.B. eine positive Steigung, sind sie streng monoton steigend.

- Bei nichtlinearen Funktionen kann das Monotonieverhalten über den Definitionsbereich variieren (sich also ändern).

3.4.2 Krümmungsverhalten und Wendepunkte

- Vorbemerkung: Mit dem Krümmungsverhalten ist die Eigenschaft der Wölbung einer Funktion angesprochen. Dabei betrachtet man die Funktion immer ausgehend von der Abszisse (x-Achse) in Richtung der Ordinate (y-Achse)

- Eine Funktion mit einer "Öffnung nach oben" bzw einer Wölbung zur x-Achse heißt konvex.

- Eine Funktion mit einer "Öffnung nach unten" bzw einer Wölbung von der x-Achse fort heißt konkav.

- Wichtig: Diese Eigenschaften sind gegebenfalls nur auf Teilintervallen des Definitionsbereichs einer Funktion zutreffend. Der Übergang vom konvexen zum konkaven Bereich bzw. vom konkaven zum konvexen Bereich nennt man einen Wendepunkt.

  Im konvexen Bereich einer Funktion steigt die Steigung ständig bis zum Wendepunkt, im konkaven Bereich fällt die Funktion ständig bis zum Wendepunkt.

3.4.3 Symmetrieeigenschaften

- Symmetrie zur Ordinate (y-Achse): Die Funktion f heißt achsensysmmetrisch oder symmetrisch zur y-Achse, falls die Funktion f gespiegelt an der y-Achse gleich der Funktion f ist. Formal heißt dies:

  $$f(-x) = f(x) \quad \forall x \in D(f).$$

  Beispiele: $y = x^2$, $y = x^4$, $y = 2x^6 - 3x^4$.

- Symmetrie zum Ursprung (=Punkt $(0,0)$): Die Funktion f heißt punktsysmmetrisch oder symmetrisch zum Ursprung, falls die Funktion f gespiegelt am Ursprung gleich der Funktion f ist. Formal heißt dies:

  $$f(-x) = -f(x) \quad \forall x \in D(f).$$

  Beispiele: $y = x^3$, $y = \sin(x)$, $y = 2x^3 - 3x$.

- Eine Funktion kann verschiedene Symmetieachsen bzw. -zentren haben.

3.4.4 Nullstellen

- Unter einer Nullstelle einer Funktion versteht man das Argument x_0 des Definitionsbereichs, zu dem der Funktionswert $f(x_0) = 0$ gehört. Es kann natürlich auch mehrere Nullstellen geben.

- Geometrische Interpretation: Schnittpunkte des Funktionsgraphen mit der Abszisse (x-Achse).

- Praktisches Vorgehen zur Bestimmung der Nullstelle: Setze die nach y explizite Funktion gleich Null und bestimme dann den zugehörigen x-Wert.

3.4.5 Absolutes Glied

- Bei ganzrationalen Funktionen ist das absolute Glied der Schnittpunkt mit der Ordinate (y-Achse).

- Analytisch ist das absolute Glied der Koeffizient des Summanden, dessen Faktor $x^0 = 1$ lautet.

Kapitel 3: Funktionen

1. Funktionsbegriff $\surd$
2. Darstellungen von Funktionen $\surd$
3. Begriffe und Bezeichnungen bei Funktionen $\surd$
4. Eigenschaften von Funktionen $\surd$
5. Elementare Funktionen
6. Funktionen mit mehreren unabhängigen Variablen

3.5.1 Klassifizierung reeller Funktionen I

- Man unterscheidet reelle Funktionen prinzipiell wie folgt:

  1. Rationale Funktionen

     1.1 Ganzrationale Funktionen

     1.2 Gebrochen rationale Funktionen

  2. Nichtrationale Funktionen

- Rationale Funktion versus Nichtrationale Funktion

  – Rationale Funktion: Bei der Berechnung des Funktionswertes y einer in einer expliziten Form gegebenen Funktion werden nur die Operationen Addition, Subbtraktion, Multiplikation und Division auf die unabhängige Variable x angewandt.

  – Nichtrationale Funktion: Bei der Berechnung des Funktionswertes y einer in einer expliziten Form gegebenen Funktion werden neben dem vier Operationen Addition, Subbtraktion, Multiplikation und Division auch andere Rechenoperationen (Logarithmieren, Wurzelbildung, etc.) auf die unabhängige Variable x angewandt.

3.5.1 Klassifizierung reeller Funktionen II

- Ganzrationale Funktionen versus Gebrochen rationale Funktionen
  - Ganzrationale Funktionen: Bei der Berechnung des Funktionswertes y einer in einer expliziten Form gegebenen Funktion werden nur die Operationen Addition, Subbtraktion und Multiplikation auf die unabhängige Variable x angewandt.
  - Nichtrationale Funktionen: Hier treten im Zähler und im Nenner ganzrationale Terme in der unabhängigen Variable x auf.

- Algbraische Funktionen versus Transzendente Funktionen
  - Algebraische Funktionen: Alle rationalen Funktionen und die Wurzelfunktionen.
  - Transzendente Funktionen: Alle nichtrationalen Funktionen abzüglich der Wurzelfunktionen.

3.5.2 Polynome I

- Funktionen, die sich durch eine Gleichung der Form

$$y = f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x^1 + a_0 x^0 = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i$$

  mit $n \in \mathbb{N}_0$, $a_i \in \mathbb{R}$ und $i = 0, \ldots, n$ angeben lassen, heißen ganzrationale Funktionen oder Polynom in x.

  Ist $a_n \neq 0$, so ist n der höchste Exponent von x; die Funktion wird deswegen auch als Polynom n-ten Grades genannt.

- Beispiele:

  1. Konstante Funktionen: Polynome vom Grad 0, z.B. $f(x) = 8$.
  2. Lineare Funktionen: Polynome vom Grad 1, z.B. $f(x) = 3x + 2$.
  3. Potenzfunktion: Polynome vom Grad n mit $a_0 = \ldots = a_{n-1} = 0$ und $a_n = 1$.
  4. Quadratische Funktionen: Polynome vom Grad 2, z.B. $f(x) = 3x^2 + 2x + 2$.

3.5.2 Polynome II

- Nullstellenbestimmung für Polynome bis zum 2. Grad:

  1. *Polynom 0. Grades*: Es existieren keine bzw. unendlich viele Nullstellen.
  2. *Polynom 1. Grades*: Es existiert eine Nullstelle bei $x = -b/a$ für die Funktion $y = ax + b$.
  3. *Polynom 2. Grades*: Es existieren maximal zwei Nullstellen. Die Nullstellen der Gleichung $ax^2 + bx + c = 0$ lassen sich nach geeigneter Umformung in $x^2 + px + q = 0$ mit Hilfe der p/q-Formel ermitteln:

$$x_{1|2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}.$$

- Nullstellenbestimmung für Polynome 3. und höheren Grades

  1. mittels des sog. Horner-Schemas,
  2. mittels der Zerlegung in Linearfaktoren.

3.5.3 Gebrochen rationale Funktionen I

- Funktionen, die sich durch eine Gleichung der Form

$$y = f(x) = \frac{g_n(x)}{h_m(x)} = \frac{a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x^1 + a_0 x^0}{b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \ldots + b_1 x^1 + b_0 x^0}$$

  mit $n \in \mathbb{N}_0$, $m \in \mathbb{N}$, $a_i, b_j \in \mathbb{R}$ und $i = 0, \ldots, n$, $j = 0, \ldots, m$ angeben lassen, heißen gebrochen rationale Funktionen. $g_n(x)$ (Zählerpolynom) bzw. $h_m(x)$ (Nennerpolynom) sind Polynome n-ten bzw. m-ten Grades in der Variablen x.

- Ist $n < m$, so spricht man von einer echt gebrochenen rationalen Funktion, ist $n \geq m$, von einer unecht gebrochen rationalen Funktion. Letztere kann durch eine Partialdivision in die Summe einer ganz rationalen (sog. Asymptote) und einer echt gebrochen rationalen Funktion zerlegt werden.

- Definitionsbereich: Gebrochen rationale Funktionen sind für alle $x \in \mathbb{R}$ ohne diejenigen x_i definiert, für die $h_m(x_i) = 0$ ist.

3.5.3 Gebrochen rationale Funktionen II

- Nullstellen von $y = f(x)$ an der Stelle $x = x_0$, falls $g_n(x_0) = 0$ und $h_m(x_0) \neq 0$, d.h. das Zählerpolynom muß an der Stelle x_0 eine Nullstelle aufweisen, das Nennerpolynom jedoch nicht.

- Echte Definitionslücken (Polstellen) von $y = f(x)$ an der Stelle $x = x_p$, falls $g_n(x_p) \neq 0$ und $h_m(x_0) = 0$. D.h. das Zählerpolynom weist an der Stelle x_p nicht den Wert null auf; zugleich besitzt das Nennerpolynom an dieser Stelle eine Nullstelle. Die Gerade $x = x_p$ (Parallele zur Ordinate) ist eine sogenannte Asymptote.

- Behebbare Definitionslücken von $y = f(x)$ an der Stelle $x = x_L$, falls $g_n(x_L) = 0$ und $h_m(x_L) = 0$. D.h. das Zählerpolynom weist ebenso wie das Nennerpolynom an der Stelle $x = x_L$ eine Nullstelle auf. Da man überall die Nullstelle als Linearfaktor abspalten kann, ist die Definitionslücke durch kürzen zu beheben.

3.5.4 Exponentialfunktionen I

- Eine Funktion der Form

$$y = f(x) = a^x \text{ mit } x \in \mathbb{R}, a > 0$$

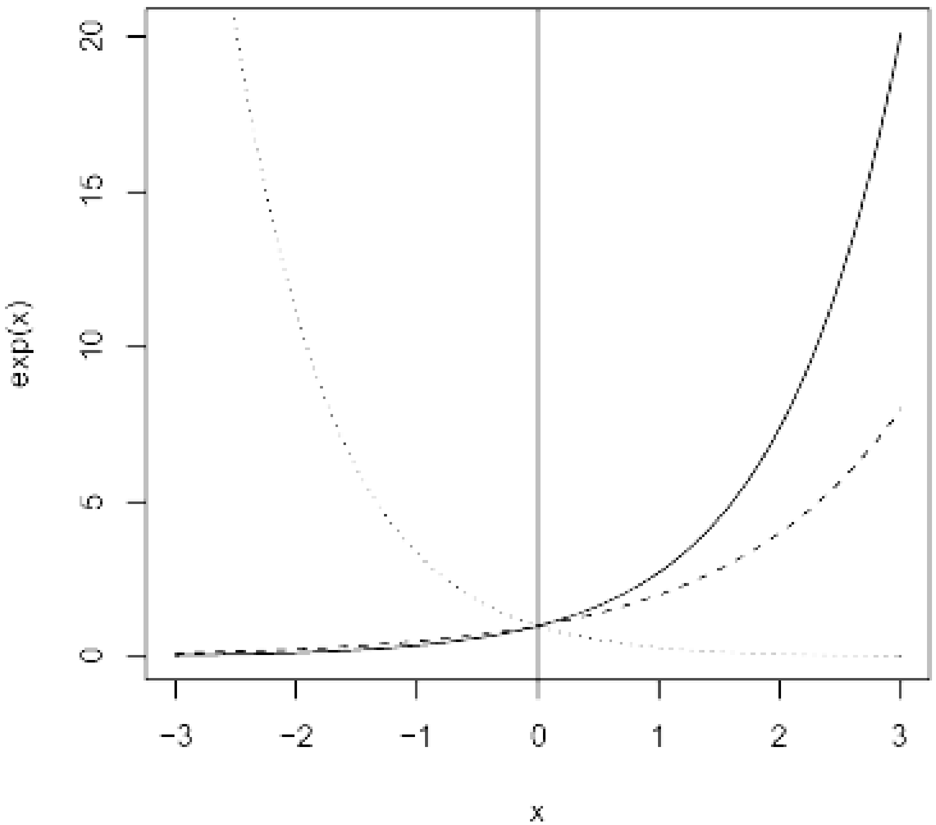
nennt man Exponentialfunktion zur Basis a.

- Eigenschaften von Exponentialfunktionen:

1. Kurven liegen im 1. und 2. Quadranten, gehen durch den Punkt $(0, 1)$ und haben keine Nullstellen.
2. Für $a > 1$ sind Exponentialfunktionen im ganzen Definitionsbereich streng monoton steigend. Für $0 < a < 1$ sind Exponentialfunktionen im ganzen Definitionsbereich streng monoton fallend.
3. Die Kurven $y = a^x$ und $y = a^{-x}$ verlaufen für gleiche Werte von a achsensymmetrisch.
4. Die Kurven $y = ka^x$ haben ähnlichen Verlauf wie $y = a^x$, k bewirkt Streckung bzw. Stauchung.
5. Exponentialfunktionen können in Form einer e-Funktionen dargestellt werden.

3.5.4 Exponentialfunktionen II

- Grafen unterschiedlicher Exponentialfunktionen $e^x, 2^x$ und 0.3^x:



3.5.5 Logarithmusfunktionen I

- Eine Funktion der Form

$$y = f(x) = \log_a x \text{ mit } x > 0, a > 0, a \neq 1$$

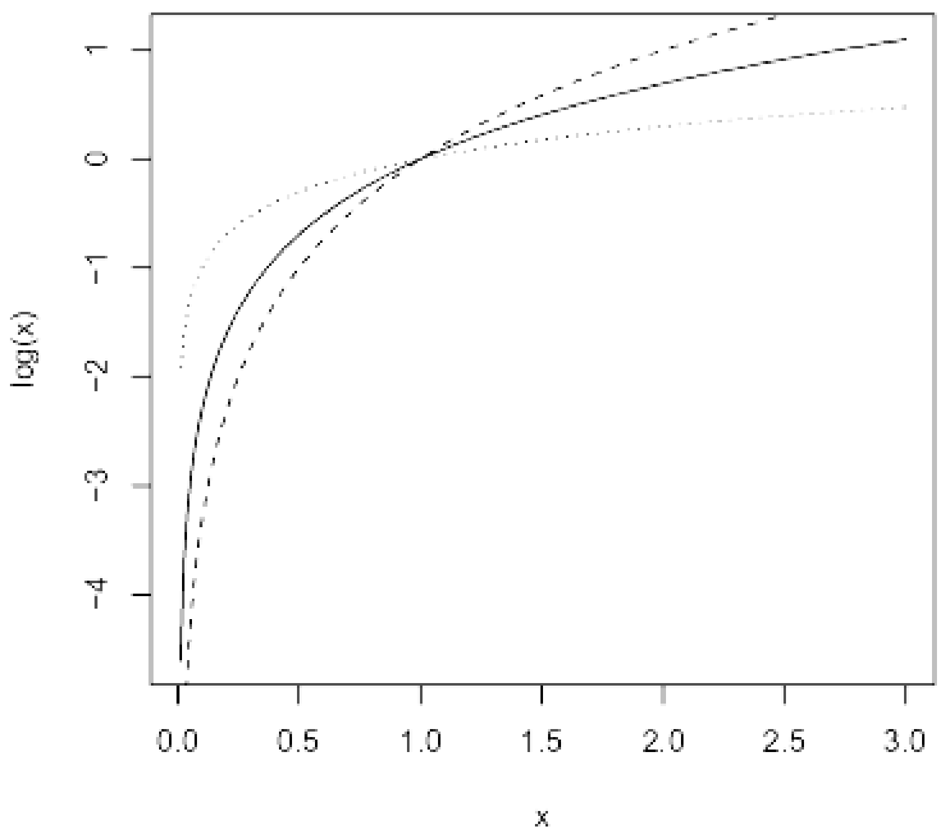
nennt man Logarithmusfunktion zur Basis a. Diese ist die Umkehrfunktion (Inverse) der Exponentialfunktion $y = a^x$.

- Eigenschaften von Logarithmusfunktionen:

1. Kurven liegen im 1. und 4. Quadranten, gehen durch den Punkt $(1, 0)$.
2. Logarithmusfunktionen nähern sich asymptotisch der Ordinate (y-Achse).
3. Logarithmusfunktionen sind im ganzen Definitionsbereich streng monoton wachsend (steigend).
4. Die Kurven $y = k \log_a x$ haben ähnlichen Verlauf wie $y = \log_a x$, k bewirkt Streckung bzw. Stauchung.

3.5.5 Logarithmusfunktionen II

- Grafen unterschiedlicher Logarithmusfunktionen $\ln x, \log_2 x$ und $\log_{10} x$:



Kapitel 3: Funktionen

1. Funktionsbegriff $\surd$
2. Darstellungen von Funktionen $\surd$
3. Begriffe und Bezeichnungen bei Funktionen $\surd$
4. Eigenschaften von Funktionen $\surd$
5. Elementare Funktionen $\surd$
6. Funktionen mit mehreren unabhängigen Variablen

3.6 Funktionen mit mehreren unabhängigen Variablen

- Gilt für eine allgemeine Funktion die Beziehung

$$y = f(x_1, x_2, \ldots, x_n),$$

dann handelt es sich um eine Funktion mit mehreren unabhängigen Variablen.

- **Beispiel**: Eine Absatzfunktion für ein Gut ist nicht nur vom Preis des Gutes p, sondern vielleicht auch vom Preis anderer Güter p' oder vom Einkommen I der potentiellen Käufer abhängig, d.h.

$$y = f(p, p', I).$$

3.6.1 Homogene Funktionen

- Verfielfacht man alle unabhängigen Variablen einer Funktion um einen gleichen Faktor λ, und vervielfacht sich dadurch der Funktionswert um λ^r, so heißt die Funktion homogen vom Grade r, formal:

$$f(\lambda x_1, \ldots, \lambda x_n) = \lambda^r f(x_1, \ldots, x_n).$$

- **Beispiel**: $f(x, y, z) = 10x^3 + 4x^2y - 3xz^2$ ist homogen vom Grade 3, da

$$\begin{aligned} f(\lambda x, \lambda y, \lambda z) &= 10(\lambda x)^3 + 4(\lambda x)^2(\lambda y) - 3(\lambda x)(\lambda z)^2 \\ &= 10\lambda^3 x^3 + 4\lambda^2 x^2 \lambda y - 3\lambda x \lambda^2 z^2 \\ &= \lambda^3(10x^3 + 4x^2 y - 3xz^2) \\ &= \lambda^3 f(x, y, z). \end{aligned}$$

3.6.2 Darstellung am Beispiel I

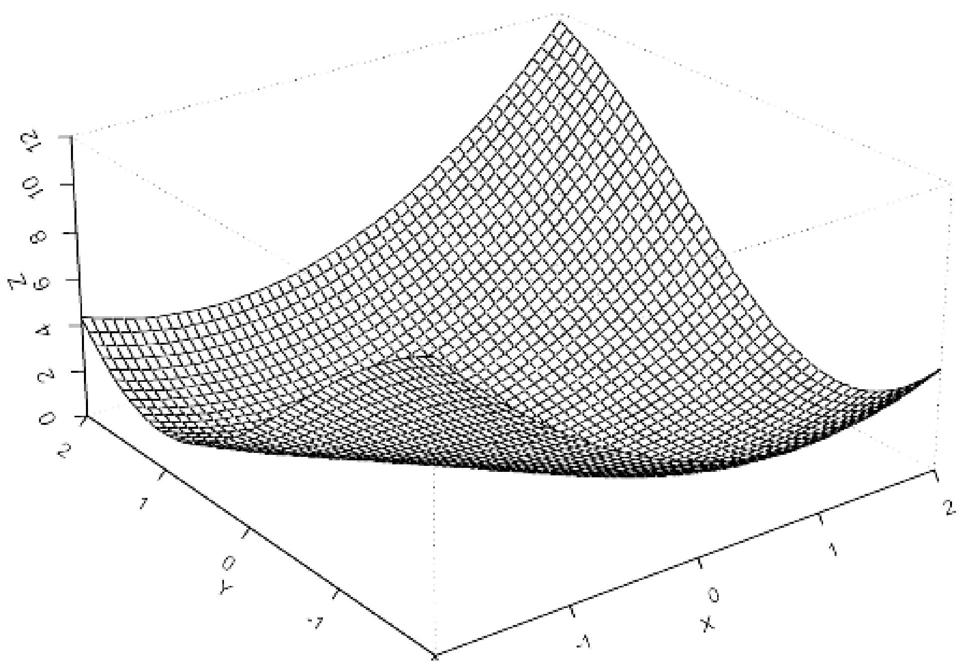
- Funktionen mit mehreren unabhängigen Variablen lassen sich ebenso wie Funktionen mit einer unabhängigen Variable auf verschiedene Arten darstellen:

  1. Analytische Darstellung: $z = f(x, y) = x^2 + y^2 + 2x\sin(y)$.
  2. Tabellarische Darstellung:

$y \downarrow x \rightarrow$	1	2
1	3.68	8.36
2	6.81	11.63

3.6.2 Darstellung am Beispiel II

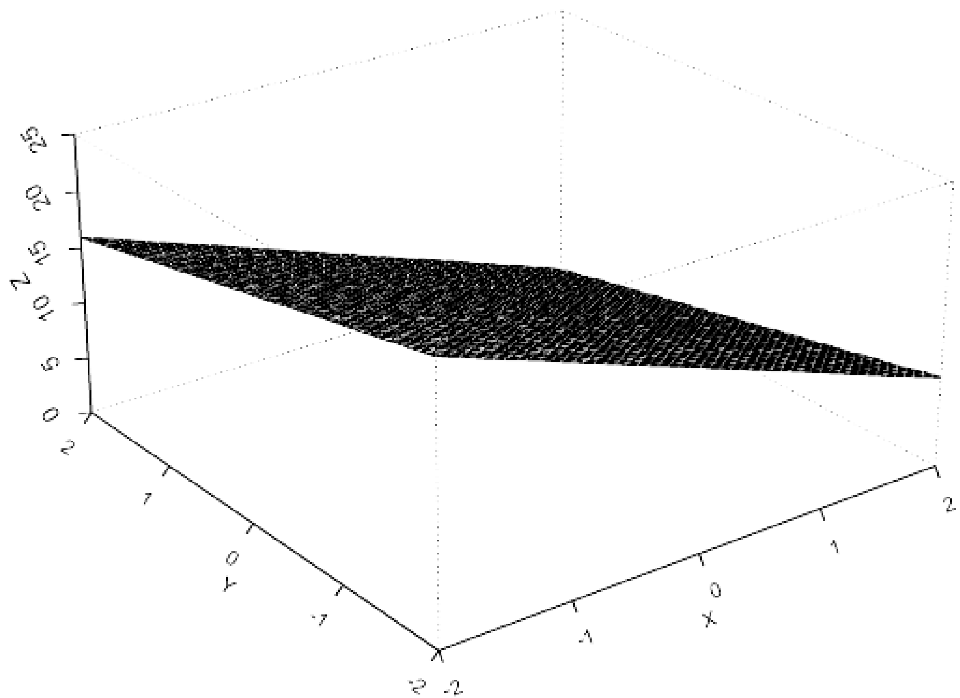
3. Grafische Darstellung von $z = f(x, y) = x^2 + y^2 + 2x\sin(y)$.



$\rightarrow$ nichtlineare Funktion mit zwei abhängigen Variablen.

3.6.2 Darstellung am Beispiel III

- Grafische Darstellung von $z = f(x, y) = 12 - 4x - 2y$.



$\rightarrow$ lineare Funktion mit zwei abhängigen Variablen: Diese Funktionen sind grafisch Ebenen im Raum.

3.6.2 Darstellung am Beispiel IV

- Lineare Funktionen sind grafisch gesehen Ebenen im Raum. Durch 3 Punkte sind diese Ebenen festgelegt, z.B. durch ihre Schnittpunkte mit den Koordinatenachsen:
  - Schnittpunkte mit $x-y-$Ebene: Setze $z=0$,
  - Schnittpunkte mit $x-z-$Ebene: Setze $y=0$,
  - Schnittpunkte mit $y-z-$Ebene: Setze $x=0$.

- **Beispiel** (Fortsetzung) Die Schnittpunkte der Funktion $z=f(x,y)=12-4x-2y$ mit den Koordinatenachsen lauten wie folgt:
  - Schnittpunkte mit $x-y-$Ebene: $(3;0)$ und $(0;6)$,
  - Schnittpunkte mit $x-z-$Ebene: $(6;0)$ und $(0;12)$,
  - Schnittpunkte mit $y-z-$Ebene: $(3;0)$ und $(0;12)$.

3.6.2 Anwendungsbeispiel: Isokostenkurven

- Für die Produktion eines Gutes werden zwei Produktionsfaktoren r_1 und r_1 mit unterschiedlichen Preisen eingesetzt. Es wurde folgende Kostenfunktion ermittelt:
$$K(r_1, r_2) = 2r_1 + 4r_2.$$
Man kann somit einen bestimmten Kostenbetrag durch den Einsatz unterschiedlicher Mengen der Produktionsfaktoren erreichen.

- Alle Punktekombinationen der Faktoreinsatzmenge, die zu gleichen Kosten führen liegen auf einer Geraden, der sog. Isokostengerade.

- **Beispiel**: Zeichen Sie zwei Isokostengeraden für die Kostenbeträge $K = 100$ und $K = 200$ und interpretieren Sie diese.

Kapitel 4: Folgen, Reihen, Grenzwerte und Stetigkeit

1. Folgen und Reihen

2. Grenzwerte für Funktionen

3. Stetigkeit einer Funktion

4.1.1 Begriff der Zahlenfolge I

- Eine Zahlenfolge oder kurz Folge ist eine Funktion f, deren Definitionsbereich die Menge oder eine Teilmenge der natürlichen Zahlen ist.

  Die Elemente a_k des Wertebereichs heißen Folgenglieder, es gilt:

$$a_k = f(k), \quad k \in \mathbb{N}, a_k \in \mathbb{R}.$$

- Notation: Man schreibt allgemein $\{a_k\}_{k\in\mathbb{N}} = a_1, a_2, \ldots$. In der Literatur gilt gelegentlich auch $k \in \mathbb{N}_0$, d.h. man bezeichnet das erste Folgenglied mit a_0.

- Endliche versus unendliche Folge
  - Eine Folge heißt endlich, wenn ihr Definitionsbereich endlich viele natürliche Zahlen enthält.
  - Eine Folge heißt unendlich, wenn ihr Definitionsbereich unendlich viele natürliche Zahlen enthält.

4.1.1 Begriff der Zahlenfolge II

- Konstante bzw. alternierende Folgen
  - Eine Folge heißt konstante Folge, falls $a_1 = a_2 = a_3 = \ldots$.
  - Eine Folge heißt alternierende Folge, falls $a_k - a_{k+1} < 0$ für $k = 1, 2, \ldots$.

- **Beispiele**

k	$a_k = f(k)$	$\{a_k\}_k$
$\mathbb{N}$	k	$1; 2; 3; 4; \ldots$
$\{1, 2, \ldots, 20\}$	$3k$	$3, 6, \ldots, 60$
$\mathbb{N}$	$2k - 1$	$1; 3; 5; 7; \ldots$
$\mathbb{N}$	$(-1)^k$	$-1; 1; -1; 1; \ldots$
$\mathbb{N}$	15	$15; 15; \ldots$
$\{1, 2, \ldots, 10\}$	$(-1)^k \cdot 2k$	$-2; 4; -6; 8; \ldots$

4.1.2 Arithmetische Folgen und Reihen I

- Eine Folge $\{a_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ heißt arithmetische Folge, wenn die Differenz der Glieder konstant ist, d.h.

$$a_{k+1} - a_k = d = \text{konstant} \quad \forall k = 1, 2, \ldots, d \in \mathbb{R}.$$

- Die Summe der ersten n Glieder der arithmetischen Folge heißt n-te Partialsumme

$$s_n = a_1 + \ldots + a_n = \sum_{i=1}^{n} a_i, \quad n = 1, 2, \ldots.$$

- Unter der arithmetischen Reihe versteht man die Folge der Partialsumme

$$s_1, s_2, \ldots.$$

4.1.2 Arithmetische Folgen und Reihen II

- Für arithmetische Folgen gilt:

$$a_k = a_1 + (k-1) \cdot d, \quad k = 1, 2, 3, \ldots, \; d \in \mathbb{R}.$$

- Weiterhin gilt für die Summe der ersten n Glieder

$$s_n = \frac{n}{2} \cdot (a_1 + a_n) = \frac{n}{2} \cdot [2a_1 + (n-1)d], \quad n = 1, 2, 3, \ldots$$

- Sind das erste und letzte Glied der Folge sowie die Differenz d bekannt, gilt für die Anzahl der Glieder:

$$k = \frac{a_k - a_1}{d} + 1.$$

- Sind das erste und letzte Glied der Folge sowie die Anzahl k der Glieder bekannt, gilt für die Differenz:

$$d = \frac{a_k - a_1}{k - 1}.$$

4.1.3 Geometrische Folgen und Reihen I

- Eine Folge $\{a_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ deren Glieder sämtlich von Null verschieden sind, heißt geometrische Folge, wenn der Quotient der Glieder konstant ist, d.h.

$$\frac{a_{k+1}}{a_k} = q = \text{konstant} \quad \forall k = 1, 2, \ldots, q \in \mathbb{R}, a_i \neq 0.$$

- Unter der geometrischen Reihe versteht man die Folge der Partialsumme

$$s_1, s_2, \ldots.$$

Dabei gilt für die n-te Partialsumme:

$$s_n = a_1 + \ldots + a_n = \sum_{i=1}^{n} a_i = \sum_{i=1}^{n} a_1 \cdot q^{i-1} = a_1 \sum_{i=0}^{n-1} q^i = a_1 \frac{q^n - 1}{q - 1}, \; q \neq 1.$$

4.1.3 Geometrische Folgen und Reihen II

- Für geometrische Folgen gilt:

$$a_k = a_1 \cdot q^{k-1}, \quad k = 1, 2, \ldots, \; q \in \mathbb{R}.$$

- Sind das erste und letzte Glied der Folge sowie die Differenz d bekannt, gilt für die Anzahl der Glieder:

$$k = \frac{\log a_k - \log a_1}{\log q} + 1, \; q \neq 1.$$

- Sind das erste und letzte Glied der Folge sowie die Anzahl k der Glieder bekannt, gilt für den Quotienten:

$$q = \sqrt[k-1]{\frac{a_k}{a_1}}.$$

4.1.4 Beschränktheit und Monotonie I

- Folgen, die nicht beliebig große oder kleine Werte annehmen können, heißen beschränkte Folgen.

- Eine Zahl S_o heißt obere Schranke der Folge $\{a_k\}_{k\in\mathbb{N}}$, wenn für alle Folgenglieder a_k, $k = 1, 2, \ldots$ gilt:
$$a_k \le S_o.$$
Die Folge heißt in diesem Fall nach oben beschränkt.

- Eine Zahl S_u heißt untere Schranke der Folge $\{a_k\}_{k\in\mathbb{N}}$, wenn für alle Folgenglieder a_k, $k = 1, 2, \ldots$ gilt:
$$a_k \ge S_u.$$
Die Folge heißt in diesem Fall nach unten beschränkt.

- Die Folge heißt beschränkt, wenn sie nach oben und nach unten beschränkt ist.

4.1.4 Beschränktheit und Monotonie II

- Eine Folge $\{a_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ heißt monoton wachsend, wenn stets $a_k \leq a_{k+1}$. Ist sogar das Ungleichheitszeichen erfüllt, heißt sie streng monoton wachsend.

- Eine Folge $\{a_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ heißt monoton fallend, wenn stets $a_k \geq a_{k+1}$. Ist sogar das Ungleichheitszeichen erfüllt, heißt sie streng monoton fallend.

- Für arithmetische Folge gilt: Sie ist streng monoton wachsend, falls $d > 0$ und sie ist streng monoton fallend für $d < 0$.

4.1.5 Grenzwert einer Folgen

- Existiert bei einer Folge $\{a_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ eine Zahl g und fallen in ein beliebig kleines Intervall um g fast alle Glieder a_k – ausgenommen endlich viele – so heißt die Zahl g Grenzwert dieser Folge.

- Eine Folge kann höchstens einen Grenzwert haben.

- Eine Folge heißt konvergent, falls sie einen Grenzwert g besitzt. Andernfalls heißt sie divergent.

- Den Grenzwert einer konvergenten Folge $\{a_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ bezeichnet man mit $\lim_{k\to\infty} a_k$ ("Limes a_k für k gegen unendlich")

4.1.6 Häufungspunkt einer Folgen

- Die Zahl h heißt Häufungspunkt der Folge $\{a_k\}_{k\in\mathbb{N}}$, wenn in jeder (noch so kleinen) Umgebung von h unendlich viele Glieder der Folge liegen.

- Bemerkungen

  1. In einer Umgebung einer Zahl können unendlich viele Folgenglieder liegen; außerhalb des Intervalls können jedoch auch unendlich viele Glieder der Folge liegen.
  2. Jeder Grenzwert ist somit auch Häufungspunkt der Folge, aber nicht umgekehrt jeder Häufungspunkt auch Grenzwert.
  3. Eine Folge kann mehr als einen Häufungspunkt haben.
  4. Falls eine Folge nur einen Häufungspunkt aufweist, muß dieser nicht unbedingt auch ein Grenzwert der Folge sein.

4.1.7 Grenzwertsätze für Folgen I

- Voraussetzungen: Die Folge $\{a_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ konvergiere gegen a, d.h. es gilt $\lim_{k\to\infty} a_k = a$. Die Folge $\{b_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ konvergiere gegen b, d.h. es gilt $\lim_{k\to\infty} b_k = b$. Dann gelten folgende Sätze:

- Grenzwertsatz für Summenfolgen: Die Folge $\{a_k + b_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ konvergiert gegen $a + b$. Es gilt also:

$$\lim_{k\to\infty}(a_k + b_k) = \lim_{k\to\infty} a_k + \lim_{k\to\infty} b_k = a + b$$

- Grenzwertsatz für Differenzfolgen: Die Folge $\{a_k - b_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ konvergiert gegen $a - b$. Es gilt also:

$$\lim_{k\to\infty}(a_k - b_k) = \lim_{k\to\infty} a_k - \lim_{k\to\infty} b_k = a - b$$

4.1.7 Grenzwertsätze für Folgen II

- Grenzwertsatz für Produktfolgen: Die Folge $\{a_k \cdot b_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ konvergiert gegen $a \cdot b$. Es gilt also:

$$\lim_{k\to\infty}(a_k \cdot b_k) = \lim_{k\to\infty} a_k \cdot \lim_{k\to\infty} b_k = a \cdot b$$

- Grenzwertsatz für Quotientenfolgen: Die Folge $\{a_k/b_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ konvergiert gegen a/b für $b \neq 0$ und $b_k \neq 0$, $k \in \mathbb{N}$. Es gilt also:

$$\lim_{k\to\infty}(a_k/b_k) = \frac{\lim_{k\to\infty} a_k}{\lim_{k\to\infty} b_k} = a/b.$$

- Konstanter Faktor: Die Folge $\{c \cdot a_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ konvergiert gegen $c \cdot a$. Es gilt also:

$$\lim_{k\to\infty}(c \cdot a_k) = c \cdot \lim_{k\to\infty} a_k = c \cdot a.$$

4.1.8 Grenzwert einer Reihe

- Falls die Folge der Partialsummen $\{s_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ einer Reihe keinen Grenzwert besitzt, nennt man die Reihe divergent. Die (unendliche) Reihe heißt konvergent, wenn die Folge $\{s_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert. Dann gilt für den Grenzwert g, der Summe der unendlichen Reihe:

$$g = \lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} a_i = \sum_{i=1}^{\infty} a_i.$$

- Notwendige Bedingung für die Konvergenz einer Reihe: Die zugehörige Folge $\{a_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ ist eine Nullfolge, d.h. $\lim_{k\to\infty} a_k = 0$. Falls die Folge nicht gegen Null konvergiert, ist die unendliche Reihe divergent.

- Eine geometrische Reihe ist genau dann konvergent, wenn q^k gegen Null konvergiert. Dies ist der Fall für $|q| < 1$ und es gilt:

$$\lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=0}^{n} a_1 q^i = \frac{a_1}{1-q}.$$

Kapitel 4: Folgen, Reihen, Grenzwerte und Stetigkeit

1. Folgen und Reihen $\surd$
2. Grenzwerte für Funktionen
3. Stetigkeit einer Funktion

4.2 Grenzwerte für Funktionen

- Grenzwerte für Funktionen existieren ebenso wie für Folgen und Reihen.

- Ziel ist es, das Verhalten einer Funktion $f(x)$ in der Umgebung der Stelle $x = a$ ihres Definitionsbereichs zu untersuchen. Dazu werden Argumentwertfolgen $x_1, x_2, \ldots$ aus dem Definitionsbereich gebildet, die gegen $x = a$ konvergieren. Konvergiert die Folge von links gegen a, spricht man von linksseitigem Grenzwert, konvergiert die Folge von rechts gegen a, spricht man von rechtsseitigem Grenzwert.

- Wenn für eine beliebige Folge von Argumentwerten $\{x_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ aus dem Definitionsbereich der Funktion $f(x)$, die gegen den Wert a konvergiert (d.h. $\lim\limits_{x\longrightarrow a} x_k = a$) die zugehörige Folge der Funktionswerte $\{f(x_k)\}_{k\in\mathbb{N}}$ stets gegen denselben Wert g konvergiert, heißt g Grenzwert der Funktion $f(x)$ an der Stelle $x = a$:
$$\lim_{x\longrightarrow a} f(x) = a.$$

Kapitel 4: Folgen, Reihen, Grenzwerte und Stetigkeit

1. Folgen und Reihen $\surd$

2. Grenzwerte für Funktionen $\surd$

3. Stetigkeit einer Funktion

4.3 Stetigkeit einer Funktionen

- "Funktion ist stetig, wenn der Funktionsgraph ohne Unterbrechung verläuft."

- Eine Funktion $f(x)$ heißt stetig an der Stelle $x = a$, wenn gilt:

  1. die Funktion ist an der Stelle $x = a$ definiert,
  2. der Grenzwert $\lim_{x \to a} f(x)$ existiert und ist eine endliche Zahl g und
  3. der Funktionswert an der Stelle $x = a$ ist gleich dem Grenzwert $f(a) = g$.

- Eine Funktion $f(x)$ heißt stetig in einem Intervall, wenn sie in jedem Punkt des Intervalls stetig ist.

- Sind bei einer Funktion $f(x)$ an der Stelle $x = a$, an der sie nicht definiert ist, der linksseitige und der rechtsseitige Grenzwert gleich, d.h. gilt

$$\lim_{x \to a-0} f(x) = g^- = \lim_{x \to a+0} f(x) = g^+ = g,$$

  so kann durch die zusätzliche Festlegung $f(a) = g^+ = g^- = g$ der fehlende Funktionswert ergänzt werden.

Kapitel 5: Finanzmathematik

1. Zinsrechnung

2. Rentenrechnung

3. Tilgungsrechnung

Begriffe der Zinsrechnung

- Zins ist der Preis für die Überlassung von Geld (Kredit).
- Erhält man z.B. auf ein Sparbuch 4% Zinsen, so ist $p = 4$ der Zinsfuß und $i = p/100$ der Zinssatz ("interest rate").
- Angaben für Zinssätze beziehen sich in der Regel auf ein Jahr (p.a.=per annum bzw. pro Jahr).
- K bezeichne das Kapital, d.h. den zugrundeliegenden Anlagebetrag. Insbesondere bezeichnet K_0 das Anfangskapital und K_n den Betrag des Kapitals nach n Jahren, meist das Endkapital

5.1.1 Einfache Verzinsung I

- Bei einfacher Verzinsung werden die während der betrachteten Perioden gezahlten Zinsen bei erneuter Zinszahlung **nicht** mitverzinst.

- Problemstellung und zugehörige Lösung:

  1. Das Anfangskapital K_0 wird bei einem Zinssatz von i und einer einfachen Verzinsung für eine Laufzeit von n Jahren angelegt. Wie groß ist das Endkapital?

     $$\boxed{K_n = K_0(1 + ni)}$$

  2. Das Endkapital K_n wurde bei einem Zinssatz von i und einer einfachen Verzinsung für eine Laufzeit von n Jahren angelegt. Wie groß war das Anfangskapital?

     $$\boxed{K_0 = \frac{K_n}{1+ni}}$$

- Beispiel: Ein Kapital in Höhe von 1000 Euro ist bei einem Zinssatz von 5% und einer einfachen Verzinsung nach einer Laufzeit von 5 Jahren auf ???? Euro angewachsen.

5.1.1 Einfache Verzinsung II

- Bemerkungen:
  1. Bei einfacher Verzinsung sind die Zinsen pro Jahr über alle Jahre immer gleich.
  2. Das Kapital bei einfacher Verzinsung bildet immer eine arithmetische Folge mit der Differenz $d = K_0 \cdot i$.
  3. Der Vorgang, zu einem gegebenen Endkapital das Anfangskapital zu berechnen, heißt Diskontierung.

- Anwendung der Formel für einfache Zinsen in der Praxis in der Regel meist nur für Laufzeiten, die einen Bruchteil n eines Jahres (z.B. 0.5 für ein halbes Jahr) sind. In aller Regel wird das Endkapital nach anteiligen Tagen wie folgt berechnet:

$$\boxed{\text{Endkapital} = \text{Anfangskapital} \left(1 + i \cdot \frac{\text{Laufzeittage}}{\text{Jahreslänge in Tagen}}\right)}$$

  Häufig: Sog. $30/360$-Tage-Berechnungsmethode.

5.1.2 Nachschüssige Zinseszinsen I

- Zinseszinsen: Zinsen, die nach einem gewissen Zeitraum gezahlt werden, werden dem Kapital zuschlagen und anschließend mitverzinst.

- "nachschüssige Verzinsung": Zinsen werden nach Ablauf der Periode dem Kapital zugeschlagen und in der folgenden Periode mitverzinst.

- "vorschüssige oder antizipative Verzinsung": Zinsen werden vor Ablauf der Periode dem Kapital zugeschlagen.

5.1.2 Nachschüssige Zinseszinsen II

- Problemstellungen und zugehörige Lösung:

1. Das Anfangskapital K_0 wird bei einem jährlichen Zinssatz von i für eine Laufzeit von n Jahren angelegt. Die Zinsen werden wieder mit angelegt. Wie groß ist das Endkapital?

$$\boxed{K_n = K_0 \cdot (1+i)^n = K_0 \cdot q^n}.$$

2. Falls statt Anfangskapital unbekannt und das Endkapital bekannt, folgt:

$$\boxed{K_0 = \frac{K_n}{(1+i)^n} = \frac{K_n}{q^n} = K_n \cdot v^n}$$

   Es bezeichne $q = 1+i$ bzw. $v = 1/q$ den Aufzinsungs- bzw. Abzinsungsfaktor.

3. Auflösen nach Laufzeit n bzw. Zinssatz

$$\boxed{n = \frac{\lg(K_n) - \lg(K_0)}{\lg(q)}} \qquad \boxed{i = \sqrt[n]{\frac{K_n}{K_0}} - 1}$$

5.1.2 Nachschüssige Zinseszinsen III

- Änderung der Zinseszinsformel bei Tageschreibweise

$$\boxed{K_t = K_0 \cdot (1+i)^{t/360}}$$

- Änderung der Zinseszinsformel bei sich ändernden (jährlichen) Zinsen

$$\boxed{K_t = K_0 \cdot (1+i_1) \cdot (1+i_2) \cdot \ldots \cdot (1+i_n)}$$

Unter dem effektiven Zinssatz oder der Rendite ist der Zinssatz i, der bei konstanter Verzinsung pro Jahr gezahlt werden muß, um das gleiche Endkapital zu erreichen.

$$\boxed{i = \sqrt[n]{(1+i_1) \cdot (1+i_2) \cdot \ldots \cdot (1+i_n)} - 1}$$

Beispiel: Bundesschatzbriefe.

5.1.3 Vorschüssige Verzinsung

- i_v bezeichne den vorschüssigen Zinssatz und $(1 - i_v)^n$ den vorschüssigen Abzinsungsfaktor.

- Zinseszinsformel bei vorschüssiger Verzinsung:

$$\boxed{K_n = \frac{K_0}{(1-i_v)^n}}$$

- Einfache Verzinsung bei vorschüssiger Verzinsung:

$$\boxed{K_n = \frac{K_0}{(1-ni_v)}}$$

- Beachte: Bei vorschüssiger Verzinsung ist das Endkapital immer höher als bei nachschüssiger Verzinsung.

- Falls nichts erwähnt: Verzinsung $=$ nachschüssige Verzinsung

5.1.4 Gemischte Verzinsung

- Beispiel: Ein Kapital in Höhe von 3.000 Euro wird vom 01.02.1998 bis 21.03.2002 zu einem Zinssatz von 4% angelegt. Dabei werden für die Zeit vom 01.02.98 bis Jahresende ($330 = 11 \cdot 30$ Zinstage) sowie für die Zeit vom 01.01.2002 bis zum 21.03.2002 (80 Zinsstage) Zinsen mittels einfacher Verzinsung, dazwischen (3 Jahre) nach der Zinseszinsformel berechnet.

$$K_n = 3000 \cdot (1 + 330/360 \cdot 0.04) \cdot (1 + 0.04)^3 \cdot (1 + 80/360 \cdot 0.04) \approx 3529.42.$$

- Zinsesformel bei gemischter Verzinsung:

$$\boxed{K_n = K_0 \cdot (1 + it_1) \cdot (1 + i)^N \cdot (1 + it_2)}$$

Dabei ist t_1 Laufzeit bis Jahresende, N die Anzahl der folgenden Jahre und t_2 die Laufzeit vom letzten Jahresende bis zum Auszahlungstermin.

5.1.5 Unterjährige Verzinsung

- Unterjährige Verzinsung: Hier wird der Zuschlag der aufgelaufenen Zinsen auf das Kapital zu mehreren Terminen (m Termine) gleichen Abstands im Jahr erfolgen. Bei monatlicher (vierteljährlicher, halbjährlicher) Verzinsung ist $m = 12$ $(m = 4, m = 2)$.

- Zinseszinsformel bei unterjähriger Verzinsung:

$$\boxed{K_n = K_0 \cdot \left(1 + \frac{i}{m}\right)^{n \cdot m}}.$$

- Der effektive (konforme, äquivalente) (Jahres-)Zinssatz i ist der jährliche Zinssatz, bei dem sich bei einmaliger Verzinsung am Jahresende der gleiche Zinsbetrag wie bei unterjähriger Verzinsung ergibt (Der unterjährige Zinssatz i_m ist ein nomineller Zinssatz):

$$\boxed{i = \left(1 + \frac{i_m}{m}\right)^m} \quad \text{bzw.} \quad \boxed{i_m = m\left(\sqrt[m]{1+i} - 1\right)}.$$

5.1.6 Stetige Verzinsung

- Stetige Verzinsung: Abzahl der Zinsperioden m wird immer größer, d.h. die Länge der Zinsperioden immer kleiner ("Grenzbetrachtung").

- Zinseszinsformel bei stetiger Verzinsung mit Zinssatz i_s:

$$\boxed{K_n = K_0 e^{i_s n}}$$

- Es gelten folgende Beziehungen zwischen exponentiellem Zinssatz i und stetigem Zinssatz:

$$\boxed{1 + i = e^{i_s}} \quad \text{bzw.} \quad \boxed{i = e^{i_s} - 1} \quad \text{bzw.} \quad \boxed{i_s = \ln(1 + i)}$$

- In der Praxis i.d.R. nicht üblich, eher in ökonomischen Modellen, z.B. Black-Scholes-Modell.

Kapitel 5: Finanzmathematik

1. Zinsrechnung $\surd$

2. Rentenrechnung

3. Tilgungsrechnung

Begriffe zur Rentenrechnung

- Rente: Folge von gleich großen Zahlungen in gleich großen Abständen.
- Rente heißt vorschüssig, falls Zahlungen zu Beginn der Periode geleistet werden.
- Rente heißt nachschüssig, falls Zahlungen am Ende der Periode geleistet werden.
- Laufzeit: Dauer über die die Zahlungen geleistet werden.
- Zeitrente: Rente, die über festen Zeitraum gezahlt wird.
- Leibrente: Rente, deren Zahlungen von einem bestimmten Zeitpunkt an bis zum Lebensende erfolgen.
- Rentenbarwert oder Gegenwartswert: Wert der Rente zum heutigen Zeitpunkt.
- Rentenendwert: Wert der Rente zum Endzeitpunkt.

5.2.1 Nachschüssige Rente I

- Problemstellungen und zugehörige Lösung (i bezeichne den Zinssatz):

  1. Der Rentenendwert R_n einer nachschüssigen Zeitrente über n Jahre in Höhe von r beträgt:

     $$\boxed{R_n = r\tfrac{q^n-1}{q-1} = r\tfrac{q^n-1}{i} = rs_n} \tag{1}$$

     mit nachschüssigem Rentenendwertfaktor

     $$s_n = \frac{q^n - 1}{i}.$$

  2. Der Rentenbarwert R_0 einer nachschüssigen Zeitrente über n Jahre in Höhe von r beträgt:

     $$\boxed{R_0 = r\tfrac{R_n}{q^n} = r\tfrac{1}{q^n}\tfrac{q^n-1}{q-1} = ra_n} \tag{2}$$

     mit nachschüssigem Rentenbarwertfaktor

     $$a_n = \frac{1 - q^{-n}}{i} = \frac{1 - v^n}{i}.$$

5.2.1 Nachschüssige Rente II

- Problemstellungen und zugehörige Lösung:

3. Laufzeit einer nachschüssigen Zeitrente über n Jahre in Höhe von r mit Rentenendwert R_n beträgt

$$\boxed{n = \frac{\lg(iR_n/r+1)}{\lg(1+i)}} \tag{3}$$

4. Laufzeit einer nachschüssigen Zeitrente über n Jahre in Höhe von r mit Rentenbarwert R_0 beträgt

$$\boxed{n = \frac{\lg(1-iR_0/r)}{\lg(1+i)}} \tag{4}$$

5.2.2 Vorschüssige Rente

- Problemstellungen und zugehörige Lösung (i bezeichne den Zinssatz):

  1. Der Rentenendwert R_n' einer vorschüssigen Zeitrente über n Jahre in Höhe von r' beträgt:

$$\boxed{R_n' = r' q \frac{q^n - 1}{q - 1}}$$

  2. Der Rentenbarwert R_0' einer vorschüssigen Zeitrente über n Jahre in Höhe von r' beträgt:

$$\boxed{R_0' = \frac{R_n'}{q^n} = r' \frac{1}{q^{n-1}} \frac{q^n - 1}{q - 1}}$$

  3. Laufzeit einer vorschüssigen Zeitrente über n Jahre in Höhe von r' mit Rentenendwert R_n' bzw. Rentenbarwert R_0' beträgt

$$\boxed{n = \frac{\lg\left(1 + \frac{i R_n'}{q r}\right)}{\lg(1+i)}} \quad \text{bzw.} \quad \boxed{n = \frac{\lg\left(1 + i - \frac{R_0' i}{r}\right))}{\lg(1+i)}}$$

5.2.3 Ewige Rente

- Ewige Rente: Anzahl der Rentenzahlungen ist unbegrenzt.
- Barwert einer ewigen Rente mit nachschüssigen Zahlungen beträgt

$$R_0 = \frac{r}{i},$$

  der Endwert ist jedoch nicht endlich.
- Kapitalisierungsfaktor ist definiert durch $\frac{1}{i} = \frac{100}{p}$.
- Barwert einer ewigen Rente mit vorschüssigen Zahlungen beträgt

$$R_0 = \frac{rq}{i}.$$

5.2.4 Aufgeschobene und abgebrochene Rente

- Aufgeschobene Rente: Rentenzahlungen beginnen erst nach Ablauf einer Wartezeit oder auch Karenzzeit.

- Bei einer aufgeschobenen jährlichen nachschüssig zu zahlenden Rente gilt:

$$\text{Rentenendwert: } R_{k+n} = r s_n,$$

$$\text{Rentenbarwert: } R_0 = R_{k+n} q^{-(k+n)} = r(a_{k+n} - a_k).$$

- Abgebrochene Rente: Rentenzahlungen endet zu einem bestimmten Zeitpunkt, während die Zinseszinsrechnung noch weiterläuft.
  Unterbrochene Rente: Zwischen Rentenzahlungen liegen Karenzzeiten.

- Bei einer abgebrochenen jährlichen nachschüssig zu zahlenden Rente gilt:

$$\text{Rentenendwert: } R_{k+n} = r s_n q^k = r a_n q^{n+k},$$

$$\text{Rentenbarwert: } R_0 = r a_n.$$

5.2.5 Jährliche Verzinsung - unterjährige Rentenzahlung I

- Bisher: Termine für Zinsberechnung (Zinsperioden) und Rentezahlung (Rentenperioden) identisch.

- Jetzt: Jährliche Verzinsung bei unterjähriger Rentenzahlung

- Später: Unterjährige/Jährliche Rentenzahlung bei unterjähriger Verzinsung

5.2.5 Jährliche Verzinsung - unterjährige Rentenzahlung II

- (Nachschüssiger Fall) Lösung mit Hilfe einer fiktiven Ersatzrente: Die fiktive Ersatzrente r_e, für die die nachschüssigen Zahlungen von m Raten im Jahr der Höhe r äquivalent ist, wenn unterjährig einfache Zinsen vergütet werden, beträgt

$$\boxed{r_e = r\left[m + \frac{(m-1)i}{2}\right]}$$

- Der Rentenendwert bzw. Rentenbarwert beträgt

$$\boxed{R_n = r_e s_n} \quad \text{mit } s_n = \frac{q^n - 1}{i} \quad \text{bzw.} \quad \boxed{R_0 = \frac{R_n}{q^n}}.$$

- Sind Rentenendwert, der Zinssatz und die Laufzeit gegeben, so gilt für die Rate r, die m-mal im Jahr gezahlt wird:

$$\boxed{r = \frac{R_n i}{\left(m + \frac{(m-1)i}{2}\right)(q^n - 1)}}$$

5.2.5 Jährliche Verzinsung - unterjährige Rentenzahlung III

- (Vorschüssiger Fall) Lösung mit Hilfe einer fiktiven Ersatzrente: Die fiktive Ersatzrente r_e, für die die vorschüssigen Zahlungen von m Raten im Jahr der Höhe r äquivalent ist, wenn unterjährig einfache Zinsen vergütet werden, beträgt

$$\boxed{r_e = r\left[m + \tfrac{(m+1)i}{2}\right]}$$

- Der Rentenendwert beträgt

$$\boxed{R_n = r_e s_n} \text{ mit } s_n = \frac{q^n - 1}{i}$$

- Kombination: Endwert einer einmaligen Zahlung und einer Rente vom m Zahlungen pro Jahr in Höhe von jeweils r, die n Jahre gezahlt wird, beträgt bei einem Zinssatz von i

$$R_n = K_0(1+i)^n \pm r_e s_n.$$

5.2.6 Unterjährige Verzinsung

- Rentenendwert bzw. Rentenbarwert einer jährlichen nachschüssigen Rente r bei m-maliger Verzinsung pro Jahr betragen

$$R_n = r' S'_{nm} \quad \text{bzw.} \quad R_0 = r' a'_{nm}$$

mit

$$i' = \frac{i}{m}, \quad q' = 1+i', \quad r' = r\frac{q'-1}{(q')^m - 1}, \quad s'_{nm} = \frac{(q')^{nm}-1}{i'}, \quad a'_{nm} = \frac{1-(q')^{-nm}}{i'}$$

- Rentenendwert bzw. Rentenbarwert einer unterjährigen nachschüssigen Rente r bei m Zahlungen und m-maliger Verzinsung pro Jahr und einem Zinssatz von i pro Jahr betragen:

$$R_n = r\frac{\left(1+\frac{i}{m}\right)^{mn}-1}{\frac{i}{m}} \quad \text{bzw.} \quad R_0 = \frac{R_n}{\left(1+\frac{i}{m}\right)^{nm}}$$

Kapitel 5: Finanzmathematik

1. Zinsrechnung $\surd$

2. Rentenrechnung $\surd$

3. Tilgungsrechnung

Grundbegriffe zur Tilgungsrechnung I

- Tilgungsrechnung: Rückzahlung von Krediten, Darlehen und anderen Geldern.
- Tilgung bzw. Tilgungsrate: Betrag, der am Ende eines Zeitabschnitts zum Abtragen der Schuld bezahlt wird.
- Tilgungsfreie Zeit: Zeit bis zum Beginn der Tilgung. In dieser Zeit wird nur die Anfangsschuld verzinst.
- Restschuld: Schuld nach einer bestimmten Zeit, nachdem ein Teil der Schuld getilgt wurde.
- Annuität: (jährliche) Zahlung (Summe aus Tilgung und Zinsen) des Schuldners

Grundbegriffe zur Tilgungsrechnung II

- Annuitätentilgung: Annuitäten sind während des gesamten Tilgungszeitraums gleich hoch; der Tilgungsanteil nimmt dagegen zu.

- Ratentilgung: Tilgungsraten sind während des Tilgungszeitraums gleich hoch, Annuitäten sind verschieden.

- Ratenkredit: Kredit mit speziellen Bedingungen, es liegt keine Ratentilgung vor.

- Tilgungsplan: Übersicht über sämtliche Zahlungen zur Tilgung einer Schuld.

Grundbegriffe zur Tilgungsrechnung III

- Beispiel: Ein Häuslebauer hat bei seinem Kreditgeber eine Schuld von $K_0 = 75000$ Euro bei $i = 8\%$ Zinsen abzuzahlen. Er kann nach jedem Jahr $A_i = 10000$ Euro für die Tilgung aufbringen, so dass nach dem ersten Jahr noch eine Restschuld von $K_1 = 71000$ Euro besteht, da er nach Ablauf des ersten Jahres

$$Z_1 = 75000 \cdot 0,08 = 6000$$

Euro Zinsen bezahlen muß und damit $T_1 = 10000 - 6000 = 4000$ Euro zur Tilgung bleiben. Nach Ablauf des zweiten Jahres sind

$$Z_2 = 71000 \cdot 0,08 = 5680$$

Euro Zinsen zu entrichten, so daß die Tilgung auf $T_2 = 10000 - 5680 = 4320$ Euro steigt und die Restschuld auf $K_2 = 75000 - 4000 - 4320 = 66680$ Euro fällt

Grundbegriffe zur Tilgungsrechnung IV

- Tilgungsplan für letztes Beispiel

Jahr	Restschuld alt	Zinsen	Annuität	Tilgung	Restschuld neu
1	75.000,00	6.000,00	10.000,00	4.000,00	71.000,00
2	71.000,00	5.680,00	10.000,00	4.320,00	66.680,00
3	66.680,00	5.334,40	10.000,00	4.665,60	62.014,40
4	62.014,40	4.961,15	10.000,00	5.038,85	56.975,55
5	56.975,55	4.558,04	10.000,00	5.441,96	51.533,60
6	51.533,60	4.122,69	10.000,00	5.877,31	45.656,28
7	45.656,28	3.652,50	10.000,00	6.347,50	39.308,79
8	39.308,79	3.144,70	10.000,00	6.855,30	32.453,49
9	32.453,49	2.596,28	10.000,00	7.403,72	25.049,77
10	25.049,77	2.003,98	10.000,00	7.996,02	17.053,75
11	17.053,75	1.364,30	10.000,00	8.635,70	8.418,05
12	8.418,05	673,44	9.091,49	8.418,05	0,00

Grundbegriffe zur Tilgungsrechnung V

- Tilgungsplan allgemein

Jahr	Restschuld	Zinsen	Annuität	Tilgung
1	K_0	$Z_1 = K_0 \cdot i$	$A_1 = Z_1 + T_1$	T_1
2	$K_1 = K_0 - T_1$	$Z_2 = K_1 \cdot i$	$A_2 = Z_2 + T_2$	T_2
3	$K_2 = K_1 - T_2$	$Z_3 = K_2 \cdot i$	$A_3 = Z_3 + T_3$	T_3
	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$
n	$K_n = K_{n-1} - T_n$	$Z_n = K_{n-1} \cdot i$	$A_n = Z_n + T_n$	T_n

- Bezeichnungen:
  - n bezeichne die Laufzeit des Darlehens,
  - K_0 die Anfangsschuld, K_m die Restschuld nach m Jahren $(m = 1, \ldots, n)$,
  - A_m die Jahresleistung (Annuität) des Schuldners im m-ten Jahr,
  - Z_m die Zinsen am Ende des m-ten Jahres und
  - T_m den Tilgungsbetrag im m-ten Jahr.

5.3.1 Ratentilgung

- Ratentilgung liegt vor, falls sämtliche Tilgungsraten gleich hoch sind, d.h. $T_m \equiv T$ für $m = 1, \ldots, n$
  $\rightarrow$ abnehmende Annuität
  $\rightarrow$ Ratentilgung häufiger bei Anleihe zu finden.

- Damit bei einer Ratentilgung die Schuld nach n Jahren getilgt ist, muß gelten:

$$T_m = T = \frac{K_0}{n}$$

$$K_m = K_0 - mT = K_0 \left(1 - \frac{m}{n}\right)$$

$$Z_m = K_0 \left(1 - \frac{m-1}{n}\right) i$$

$$A_m = T_m + Z_m = K_0 \left[\frac{1}{n} + i \left(1 - \frac{m-1}{n}\right)\right]$$

5.3.2 Annuitätentilgung I

- Annuitätentilgung liegt vor, falls sämtliche Annuitäten (also Tilgung und Zinsen) gleich hoch sind, d.h. $A_m \equiv A$ für $m = 1, \ldots, n$
  $\rightarrow$ abnehmende Tilgungsrate
  $\rightarrow$ Annuitätentilgung häufiger bei Hypothekendarlehen zu finden.

- Tilgungsplan allgemein

Jahr	Restschuld	Zinsen	Annuität	Tilgung
1	K_0	$Z_1 = K_0 \cdot i$	A	$T_1 = A - iK_0$
2	$K_1 = K_0 - T_1$	$Z_2 = K_1 \cdot i$	A	$T_2 = A - iK_1 = T_1 q$
3	$K_2 = K_1 - T_2$	$Z_3 = K_2 \cdot i$	A	$T_3 = A - iK_2 = T_2 q^2$
	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$
n	$K_n = K_{n-1} - T_n$	$Z_n = K_{n-1} \cdot i$	A	$T_n = A - iK_{n-1}$

5.3.2 Annuitätentilgung II

- Bei der Annuitätentilgung muß folgendes gelten:

$$
\begin{aligned}
A_m &= A = T_m + Z_m && (5)\\
T_m &= T_1 q^{m-1}, \quad T_1 = A - iK_0 && (6)\\
Z_m &= A - T_m && (7)\\
K_0 &= T_1 + \ldots + T_n = T_1(1 + q + \ldots q^{n-1}) = T_1 s_n && (8)\\
K_0 &= A a_n, \quad A = \frac{K_0 i}{1 - v^n} = \frac{K_0}{a_n} && (9)\\
A &= T_1 s_n / a_n = T_1 q^n && (10)\\
K_m &= A a_{n-m} && (11)\\
K_m &= K_0 - T_1 - \ldots - T_m = K_0 - s_m T_1 && (12)\\
K_m &= K_0 q^m - A s_m && (13)
\end{aligned}
$$

5.3.2 Annuitätentilgung III

- Bei der Annuitätentilgung muß folgendes gelten:

$$n = \frac{\lg(1 - iK_0/A)}{\lg v} \tag{14}$$

$$n = \frac{\lg A - \lg T_1}{\lg q} = \frac{\lg(A/T_1)}{\lg q} \tag{15}$$

$$a_n = \frac{q^n - 1}{q^n(q-1)} = \frac{1 - v^n}{i} \tag{16}$$

$$s_n = \frac{q^n - 1}{i} \tag{17}$$

$$\lg v = -\lg q \tag{18}$$

5.3.2 Annuitätentilgung IV

- Prozentannuität: Annuität A wird als Prozentsatz i_A von K_0 berechnet.
- $i_T = i_A - i$ heißt (anfänglicher) Tilgungssatz, wobei i der Zinssatz ist.
- Die Laufzeit eines Annuitätendarlehens mit einem Zinssatz i und einem anfänglichen Tilgungssatz von i_T beträgt

$$n = \frac{\lg\left(\frac{i+i_T}{i_T}\right)}{1+i}.$$

5.3.3 Tilgung mit Aufgeld

- Tilgung mit Aufgeld: Bei Rückzahlung ist auf den jeweiligen Tilgungsbetrag ein Aufgeld (Aufschlag, Agio) zu zahlen, welches in der Regel ein fester Prozentsatz a der Tilgung ist. Das Aufgeld wird nicht verzinst.

- Allgemein gilt dann:

$$\text{Annuität} = \text{Zinsen} + \text{Tilgung} + \text{Aufgeld}$$

- Analog: Definition eines Abschlags.

5.3.4 Unterjährige Verzinsung und Tilgung

- Bei Darlehenstilgung erfolgt die Zins- und Tilgungsverrechnung meist monatlich ($m = 12$). Es können die gleichen Formeln verwendet werden, allerdings muß als neuer Zinssatz i/m verwendet werden. A bezeichnet hier dann nicht die Annuität sondern die monatliche Zahlung.

5.3.5 Disagio und Zinsfestschreibung I

- Tilgungspläne in der Praxis sind i.d.R. etwas komplizierter. Es müssen noch Verwaltungsgebühren, Schätzkosten, Kontoführungsgebühren, Provisionen oder Bereitstellungszinsen gezahlt werden. Diese können wie folgt eingebaut werden:

  1. Kosten in Höhe von $b\%$ der jeweiligen Restschuld können durch Modifikation des Zinssatzes in $(i + b)\%$ eingearbeitet werden.
  2. Fixe Gebühren pro Zeitraum werden im Tilgungsplan dadurch berücksichtigt, daß die Restschuld um die fixen Gebühren erhöht wird.
  3. Oft muß auch noch eine Versicherung abgeschlossen werden, eine sog. Restschuldversicherung. Diese dient dazu, den Kreditgeber abzusichern (gegen mögliche Tilgungsausfälle).
  4. Disagio oder Damnum oder Abgeld nennt man einen Abzug vom nominellen Darlehen. Die Auszahlung des Darlehens erfolgt nicht zu 100%, sondern z.B. zu 95%. Die 5% behält der Darlehensgeber. Es müssen aber trotzdem 100% zurückgezahlt werden (Beachte: Es ändert sich nur die Effektivverzinsung).

5.3.5 Disagio und Zinsfestschreibung II

- Zinsbindung: Bei dem meisten Hypothekendarlehen ist der Zinssatz nicht für die gesamte Laufzeit festgeschrieben, sondern nur für $5, 10, 15$ Jahre festgeschrieben (sog. Zinsfestschreibung). Danach muß neu verhandelt werden.

- Problem: Zins nach Ablauf der Zinsbindung vorher nicht bekannt, d.h. Unsicherheitsfaktor.

Kapitel 6: Differentialrechnung

1. Grundlagen

2. Ableitungsregeln

3. Analyse von Funktionen mit einer unabhängigen Variablen

4. Analyse von Funktionen mit mehreren unabhängigen Variablen

5. Elastizitäten

Motivation und Beispiel

- Unternehmen *Innovativ AG* plant neues Konsumgut auf den Markt zu bringen.
- Gesamtkostenfunktion des Gutes: $y = K(x)$ mit Marktzutrittsmenge x_0 ME.
- Marktstudie nach Einführung zeigt: Nachfrage höher als zuerst gedacht.
- *Innovativ AG* überlegt nun, Produktionsvolumen auf $x_1 > x_0$ zu erhöhen.
- Information für Preiskalkulation: Wie hoch sind die durchschnittlichen Kosten pro zusätzlich gefertigter Menge, d.h. die Veränderung der Gesamtkosten bezogen auf die Veränderung der Ausbringungsmenge.

$$\overline{y} = \frac{\Delta K}{\Delta x} = \frac{K(x_1) - K(x_0)}{x_1 - x_0}.$$

6.1.1 Differenzenquotient

- Lineare Gesamtkostenkurve: Hier ist der Quotient $\frac{\Delta K}{\Delta x} \equiv C$ (konstant) für alle möglichen x_0, x_1 aus dem Definitionsbereich.

- Nichtlineare Gesamtkostenkurve: Hier ist der Quotient $\frac{\Delta K}{\Delta x}$ nicht unbedingt konstant. Geometrisch ist dieser hier gleich dem Anstieg der Sekante durch die Punkte (x_0, y_0) und (x_1, y_1):

$$\tan \alpha = \frac{\Delta K}{\Delta x} = \frac{K(x_1) - K(x_0)}{x_1 - x_0} = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}. \qquad (\star)$$

- Allgemein: Setze $x_1 = x_0 + \Delta x$ und $y_1 = y_0 + \Delta y$, so folgt aus $(\star)$:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}.$$

  Dies ist der sog. Differenzenquotient (durchschnittliche Änderungsrate) der Funktion $y = f(x)$ an der Stelle x_0.

6.1.2 Differentialquotient

- Frage: Wie verhält sich der durchschnittlichen Grenzkostenzuwachs für ganz kleines Intervall Δx?

- Grenzfall: Was passiert, wenn Δx gegen Null geht? $\rightarrow$ marginaler (augenblicklicher) Grenzkostenzuwachs (Geometrisch: Aus Sekante wird eine Tangente!!).

- Existiert der Grenzwert des Differentialquotienten

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x},$$

  so heißt er Differentialquotient bzw. 1. Ableitung der Funktion $y = f(x)$ an der Stelle x_0.

- Andere gebräuchliche Schreibweisen für die erste Ableitung an der Stelle x_0:

$$f'(x_0), \quad y'(x_0), \quad (dy/dx)_{x=x_0}$$

6.1.3 Differenzierbarkeit und Stetigkeit

- Eine Funktion $y = f(x)$ sei an der Stelle x_0 definiert. Die Funktion heißt an der Stelle x_0 differenzierbar, wenn der Grenzwert

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

  existiert und einen bestimmten Wert $f'(x_0) = g$ annimmt.

- Bemerkung:
  - Jede differenzierbare Funktion ist auch stetig.
  - Nicht jede stetige Funktion ist auch differenzierbar.
    Beispiel: Betragsfunktion $y = f(x) = |x|$.

- "Faustregel": Differenzierbare Funktionen dürfen keine Sprünge, Lücken, Spitzen und Ecken besitzen.

- Differenzenquotient existiert nicht, falls Tangente mit Abszisse rechten Winkel bildet. Beispiel: $y = f(x) = \sqrt{x}$ im Punkt $(0, 0)$.

Kapitel 6: Differentialrechnung

1. Grundlagen $\surd$
2. Ableitungsregeln
3. Analyse von Funktionen mit einer unabhängigen Variablen
4. Analyse von Funktionen mit mehreren unabhängigen Variablen
5. Elastizitäten

6.2 Ableitungsregeln I

1. Potenzregel:

$$\boxed{y'(x) = (x^n)' = nx^{n-1}.}$$

2. Konstantenregeln:

$$\boxed{y'(x) = [af(x)]' = af'(x),}$$

$$\boxed{y'(x) = [f(x) + a]' = f'(x),}$$

$$\boxed{y'(x) = a' = 0.}$$

3. Summenregel (Diese Regel gilt auch für mehrere Summanden):

$$\boxed{y'(x) = [u(x) \pm v(x)]' = u'(x) \pm v'(x).}$$

6.2 Ableitungsregeln II

4. Produktregel:

$$\boxed{y'(x) = [u(x) \cdot v(x)]' = u'(x)v(x) + u(x)v'(x).}$$

5. Quotientenregel:

$$\boxed{y'(x) = \left[\frac{u(x)}{v(x)}\right]' = \frac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{[v(x)]^2}.}$$

6. Kettenregel für eine zusammengesetzte (verkettete) Funktion $y(x) = f(g(x))$:

$$\boxed{y'(x) = [f(g(x))]' = f'(g(x)) \cdot g'(x).}$$

6.2 Ableitungsregeln III

7. Logarithmische Funktion

$$\boxed{y'(x) = (\ln x)' = \tfrac{1}{x},} \qquad x \in \mathbb{R}_+,$$

$$\boxed{y'(x) = (\log_a x)' = \tfrac{1}{\ln(a)} \cdot \tfrac{1}{x},} \qquad x \in \mathbb{R}_+, a > 0.$$

8. Exponentialfunktion

$$\boxed{y'(x) = (e^x)' = (\exp(x))' = e^x,} \qquad x \in \mathbb{R},$$

$$\boxed{y'(x) = (a^x)' = a^x \cdot \ln(a),} \qquad x \in \mathbb{R}, a > 0.$$

6.2 Ableitungsregeln IV

- Ableitungen höherer Ordnung: Ist eine von einer Funktion $y = f(x)$ gebildete Ableitungsfunktion $y' = f'(x)$ selbst wieder differenzierbar, kann man von ihr wiederum die Ableitung bilden. Diese wird als 2. Ableitung der Ursprungsfunktion bezeichnet und lautet:

$$y'' = f''(x) = \frac{d^2y}{dx^2}.$$

  Läßt sich diese 2. Ableitung ebenfalls wieder differenzieren, erhält man die 3. Ableitung der Ursprungsfunktion, etc.

  Die weiteren Ableitungen höheren Ordnung lauten somit:

$$y^{(n)} = f^{(n)}(x) = \frac{d^ny}{dx^n}.$$

- Beispiel: Bücker, S. 181.

Kapitel 6: Differentialrechnung

1. Grundlagen $\surd$

2. Ableitungsregeln $\surd$

3. Analyse von Funktionen mit einer unabhängigen Variablen

4. Analyse von Funktionen mit mehreren unabhängigen Variablen

5. Elastizitäten

6.3.1 Monotonieverhalten

- In Abschnitt 3.4.1: Einführung des Begriffs der Monotonie.
- Jetzt: Exakte Untersuchung des Monotonieverhaltens einer Funktion.
- Für eine im Intervall $I = [a, b]$ stetige und in (a, b) differenzierbare Funktion $y = f(x)$ gelten als notwendige und hinreichende Bedingungen für ihre Monotonie:

  1. $f'(x) \leq 0$ für monotones Fallen,
  2. $f'(x) \geq 0$ für monotones Wachsen (Steigen).

6.3.2 Extremwerte I

- Ein lokales (relatives) Maximum einer Funktion $y = f(x)$ liegt an der Stelle $x = x_1$ vor, wenn in einer hinreichend kleinen Umgebung von x_1, d.h. wenn für alle Δx von hinreichend kleinem Absolutbetrag, gilt:

$$f(x_1) > f(x_1 + \Delta x).$$

- Ein lokales (relatives) Minimum einer Funktion $y = f(x)$ liegt an der Stelle $x = x_2$ vor, wenn in einer hinreichend kleinen Umgebung von x_2, d.h. wenn für alle Δx von hinreichend kleinem Absolutbetrag, gilt: $f(x_2) < f(x_2 + \Delta x)$.

- Gilt für eine Stelle $x = x_0$ bzgl. des gesamten Definitionsbereichs einer Funktion:

$$f(x_0) > f(x) \quad \text{bzw.} \quad f(x_0) < f(x),$$

  so handelt es sich um ein absolutes Maximum bzw. absolutes Minimum.

- Extremum ist Oberbegriff für Minima und Maxima.

6.3.2 Extremwerte II

- Ein lokales (relatives) Maximum einer Funktion $y = f(x)$ liegt an der Stelle $x = x_1$ vor, wenn das Vorzeichen von $f'(x)$ beim Durchlaufen von x_1 von positiv nach negativ wechselt.

- Ein lokales (relatives) Minimum einer Funktion $y = f(x)$ liegt an der Stelle $x = x_2$ vor, wenn das Vorzeichen von $f'(x)$ beim Durchlaufen von x_2 von negativ nach positiv wechselt.

- (Notwendige Bedingung für Extremstellen) Das also das Vorzeichen von $f'(x)$ beim Überschreiten eines Extremwerts wechselt, muß für eine Extremstelle x_0 als notwendige Bedingung gelten: $f'(x_0) = 0$.

- (Hinreichende Bedingung für Extremstellen) Ein lokales Maximum (Minimum) liegt an der Stelle $x = x_0$ vor, falls

$$f'(x_0) = 0 \text{ und } f''(x_0) < 0 \qquad (f''(x_0) > 0).$$

6.3.2 Sattelpunkte

- Ein Sattelpunkt liegt an der Stelle $x = x_0$ vor, wenn

$$f'(x_0) = 0 \text{ und } f''(x_0) = 0 \text{ und } f'''(x_0) \neq 0.$$

- Ein Sattelpunkt liegt an der Stelle $x = x_0$ vor, wenn

$$f'(x_0) = 0 \text{ und } f''(x_0) = 0$$

  und die erste Ableitung höheren Grades, die ungleich Null ist, weist einen ungeraden Ableitungsgrad auf.

- Ein Extremwert liegt an der Stelle $x = x_0$ vor, wenn

$$f'(x_0) = 0 \text{ und } f''(x_0) = 0$$

  und die erste Ableitung höheren Grades, die ungleich Null ist, weist einen geraden Ableitungsgrad auf. Bei negativen Wert dieser Ableitung liegt ein Maximum und bei positiven Wert ein Minimum vor.

6.3.3 Krümmungsverhalten und Wendepunkte I

- Eine im Intervall $I = (a, b)$ differenzierbare Funktion $y = f(x)$ ist genau dann konvex bzw. linksgekrümmt (von unten), wenn $f'(x)$ in (a, b) monoton steigend ist.

- Eine im Intervall $I = (a, b)$ zweimal differenzierbare Funktion $y = f(x)$ ist genau dann konvex bzw. linksgekrümmt (von unten), wenn $f''(x) \geq 0$ für alle $x \in (a, b)$.

- Eine im Intervall $I = (a, b)$ differenzierbare Funktion $y = f(x)$ ist genau dann konkav bzw. rechtsgekrümmt (von unten), wenn $f'(x)$ in (a, b) monoton fallend ist.

- Eine im Intervall $I = (a, b)$ zweimal differenzierbare Funktion $y = f(x)$ ist genau dann konkav bzw. rechtsgekrümmt (von unten), wenn $f''(x) \leq 0$ für alle $x \in (a, b)$.

- Gilt sogar das Ungleichheitszeichen, so heißt die Funktion streng konvex/konkav.

6.3.3 Krümmungsverhalten und Wendepunkte II

- Unter einem Wendepunkt versteht man einen Übergang von einem konvexen zu einem konkaven Bereich einer Funktion.

- (Notwendige Bedingung für Wendepunkt) $f''(x_0) = 0$.

- (Hinreichende Bedingung für Wendepunkt) $f'''(x_0) \neq 0$.

- Hinweis: Ist die zweite und die dritte Ableitung an der Stelle x_0 gleich Null, so gelten die Ausführungen oben bzgl. eines Sattelpunktes.

6.3.4 Asymptoten

- Eine Gerade heißt Asymptote einer Funktion $y = f(x)$, wenn der Abstand eines Kurvenpunktes von der Geraden gegen Null konvergiert.

- Die Funktion $x = x_0$ heißt vertikale Asymptote einer Funktion $y = f(x)$, wenn

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \pm\infty.$$

  Die Stelle $x = x_0$ heißt Pol- oder Unendlichkeitsstelle.

- Die Funktion $x = x_0$ heißt horizontale Asymptote einer Funktion $y = f(x)$, wenn

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = b \text{ bzw. } \lim_{x \to -\infty} f(x) = b.$$

- Beispiel: $y = f(x) = \frac{1}{x}$ besitzt horizontale und vertikale Asymptoten.

6.3.5 Kurvendiskussion

- Bestimmung des Definitionsbereichs und Wertebereichs
- Nullstellenbestimmung
- Symmetrieverhalten
- Unstetigkeitsstellen, Polstellen, asymptotisches Verhalten
- Monotonieverhalten
- Extremwerte
- Krümmungsverhalten und Wendepunkte
- Verhalten im Unendlichen
- Skizze der Funktion und der Ableitungen der Funktion

Kapitel 6: Differentialrechnung

1. Grundlagen $\surd$
2. Ableitungsregeln $\surd$
3. Analyse von Funktionen mit einer unabhängigen Variablen $\surd$
4. Analyse von Funktionen mit mehreren unabhängigen Variablen
5. Elastizitäten

6.4.1 Allgemeine Problemstellung

- In der Ökonomie hängt eine Variable oft von mehreren erklärenden Variablen ab; z.B. kann die Kostenfunktion eines Außendienstmitarbeiters abhängig sein von den Kilometern (x) und den Arbeitsstunden (y), konkret

$$K(x,y) = 2x^3y + 4x^2y - 3xy^2 + 200.$$

- Liegt eine eindeutige Abbildung der Menge der geordneten Paare (x_t, y_t) auf eine Menge Z vor, so heißt die Menge aller geordneten Zahlentripel (x_t, y_t, z_t) eine Funktion von zwei Variablen, kurz:

$$z = f(x,y).$$

- Grafische Darstellung durch 3-dimensionale Plots.

- Durch Konstanthaltung einer Variablen kann man die Funktion auch als Funktion einer Variablen auffassen.

6.4.2 Partielle Ableitungen 1. Ordnung

- Frage: Wie ändern sich die Kosten, wenn sich die erste Kosteneinflußgröße (Fahrtkilometer) ändert, bei Konstanz der anderen Kosteneinflußgröße (Arbeitsstunden)?
  Lösung durch sog. partielle Ableitung erster Ordnung.

- Die erste partielle Ableitung nach x wird definiert durch

$$f_x = \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f(x, y_0)}{\partial x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x, y_0) - f(x, y_0)}{\Delta x},$$

die erste partielle Ableitung nach y durch

$$f_y = \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial f(x_0, y)}{\partial y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x_0, y + \Delta y) - f(x_0, y)}{\Delta y}.$$

6.4.2 Partielle Ableitungen n-ter Ordnung

- Bildet man von der Funktion $z = f(x, y)$ die partiellen Ableitungen f_x und f_y, so lassen sich diese u.U. wieder nach x bzw. y differenzieren. Man schreibt hierfür:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = f_{xx}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = f_{yy}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = f_{xy} = f_{yx} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}.$$

  Dabei kennzeichnen f_{xy} und f_{yx} gemischt partielle Ableitungen.

- Satz: Ist die Funktion $z = f(x, y)$ in einem vorgegebenen Intervall mehrfach partiell differenzierbar und sind diese partielle Ableitungen stetig, so sind die Differentiationen von der Reihenfolge unabhängig.

Kapitel 6: Differentialrechnung

1. Grundlagen $\surd$
2. Ableitungsregeln $\surd$
3. Analyse von Funktionen mit einer unabhängigen Variablen $\surd$
4. Analyse von Funktionen mit mehreren unabhängigen Variablen $\surd$
5. Elastizitäten

6.5.1 Einführung

- Häufige Fragestellung in Wirtschaftswissenschaften: *Um wieviel ändert sich eine abhängige Größe, wenn eine andere Größe modifiziert wird?*

- Beispiel: *Um wieviel ändert sich die Nachfrage (nachgefragte Menge), wenn sich der Preis ändert*?

  Ausgangspunkt: Preis-Absatz-Funktion $p(x) = 10 - 0.5x$ (bei Monopolisten).
  Bildung der Umkehrfunktion ergibt Absatz-Preis-Funktion $x(p) = 20 - 2p$.
  Beschreibe Änderung der Nachfrage durch 1. Ableitung $x' = dx/dp = -2$,
  d.h. wenn der Preis um eine Einheit steigt, fällt die Menge um 2 Einheiten.
  Allerdings: Vergleiche Preiserhöhung um eine Einheit für zwei Situationen:
  (i) $p = 1$ und $x = 18 \Rightarrow p = 2\,(+50\%)$ und $x = 16\,(-11.1\%)$, Umsatz: $+77\%$
  (ii) $p = 9$ und $x = 2 \Rightarrow p = 10\,(+11.1\%)$ und $x = 0\,(-100\%)$, Umsatz: -100%
  Ergebnis: Nicht absolute, sondern relative Veränderungen sind entscheidend!
  im Fall (i): absolute relative Veränderung $|((16-18)/18)/((2-1)/1)| = 0.1$.
  im Fall (ii): absolute relative Veränderung $|((0-2)/2)/((10-9)/9)| = 9$.

6.5.2 Bogenelastizität

- Das berechnete Verhältnis der relativen Veränderungen heißt Elastizitäten.

- Die relative Veränderung der Mengen bezogen auf die relative Veränderung der Preise heißt Preiselastizität der Nachfrage. Es gilt:

$$\frac{\text{relative Veränderung der Menge}}{\text{relative Veränderung der Preise}} = \frac{\frac{\Delta x}{x}}{\frac{\Delta p}{p}}$$

- Dieser Ausdruck, der die Veränderung in zwei Intervallen in Beziehung setzt, bezeichnet man auch als durchschnittliche Elastizität oder Bogenelastizität:

$$\frac{\frac{\Delta x}{x}}{\frac{\Delta p}{p}} = \frac{\Delta x}{\Delta p} \cdot \frac{p}{x} = \epsilon.$$

6.5.3 Punktelastizität

- Um die wirklichen Veränderungen in einem Punkt zu erhalten, muß das Δx unendlich klein werden, d.h. das $'\Delta'$ wird durch ein d ersetzt und es gilt:

$$\frac{\frac{dx}{x}}{\frac{dp}{p}} = \frac{dx}{dp} \cdot \frac{p}{x} = \epsilon_{xp}.$$

  Diese Elastizität wird auch als Punktelastizität ϵ_{xp} bezeichnet, denn sie bezieht sich auf differentielle Veränderungen, d.h. auf die Veränderung in einem Punkt.

- Elastizität $=$ i.d.R. Punktelastizität.

- Funktionen mit mehreren Variablen: Elastizität mittels partieller Ableitungen.

- Wenn die Veränderung der abhängigen Variablen kleiner als die der unabhängigen Variablen ist, nennt man den Zusammenhang unelastisch. Ist die Veränderung der Abhängigen dagegen größer als die der Unabhängigen, so heißt der Zusammenhang elastisch.

Kapitel 7: Integralrechnung

1. Grundaufgaben der Integralrechnung
2. Unbestimmtes Integral
3. Bestimmtes Integral
4. Integrationsregeln
5. Uneigentliche Integrale
6. Anwendung der Integralrechnung in der Ökonomie

7.1 Grundaufgaben der Integralrechnung

1. Umkehrung der Differentialrechnung: Es soll eine Funktion ermittelt werden, deren Ableitung vorliegt, d.h. die Integralrechnung ist die Umkehrung der Differentialrechnung. Es gilt:

   - Gegeben: $f(x)$, stetig in $a \leq x \leq b$.
   - Gesucht: $F(x)$, so daß gilt: $F'(x) = f(x)$.

2. Berechnung des Flächeninhalts unter Kurven von Funktionen, d.h. die Integralrechnung als Grenzwert einer Summe zur Flächenbestimmung einer Funktion. Es gilt:

   - Gegeben: $f(x)$, stetig in $a \leq x \leq b$.
   - Gesucht: Inhalt einer Fläche, die begrenzt ist durch $f(x)$, die Abszisse und die beiden Parallelen zur Ordinate an den Stellen $x = a$ und $x = b$.

- Beispiel: Reperaturkosten einer Maschine

Kapitel 7: Integralrechnung

1. Grundaufgaben der Integralrechnung $\surd$
2. Unbestimmtes Integral
3. Bestimmtes Integral
4. Integrationsregeln
5. Uneigentliche Integrale
6. Anwendung der Integralrechnung in der Ökonomie

7.2 Unbestimmtes Integral I

- Aufgabenstellung: In einem Intervall sei die Funktion $f(x)$ gegeben. Eine im Intervall diff'bare Funktion $F(x)$ soll so bestimmt werden, daß ihre Ableitung $F'(x) = f(x)$ ist.

- Neben $\frac{dF(x)}{dx} = F'(x) = f(x)$ gilt auch $\frac{d[F(x)+C]}{dx} = F'(x) = f(x)$ für jede beliebige Konstante C. Unter der Voraussetzung, daß $f(x)$ im gesamten Intervall die Ableitung von $F(x)$ ist, heißen alle Funktionen $F(x)+C$ Stammfunktionen oder Integrale der Funktion $f(x)$. Die Gesamtheit aller Stammfunktionen heißt auch unbestimmtes Integral der Funktion $f(x)$ und wird mit $\int f(x)dx$ bezeichnet:

$$\int f(x)dx = F(x) + C.$$

- Das Ermitteln des unbestimmten Integrals heißt Integrieren, $f(x)$ ist der Integrand des unbestimmten Integrals, x die Integrationsvariable und C die Integrationskonstante.

7.2 Unbestimmtes Integral II

- Bemerkungen zum unbestimmten Integral

1. Das unbestimmte Integral einer Funktion $f(x)$ ist keine eindeutig bestimmte Funktion (wegen der frei wählbaren Konstante C). Grafisch entspricht dies einer "Schar von Funktionen".
2. Jedoch sind die Steigungen aller Kurven der Schar von Stammfunktionen an einer beliebigen Stelle x_0 gleich.
3. Eine durch eine vorgegebene Bedingung (z.B. soll die Funktion durch Punkt $(1, 2)$ verlaufen) festgelegte Funktion aus der Menge der Stammfunktionen heißt partikuläres Integral.
4. Legt die Anfangsbedingung speziell eine Nullstelle der gesuchten Stammfunktion bei $x = a$ fest, so ergibt sich wegen $y = F(x) + C$ dann $0 = F(a) + C$, also $C = -F(a)$ und somit das partikuläre Integral

$$\int_a^x f(u)du = F(x) - F(a).$$

Dabei heißt $x = a$ untere Grenze und die unabhängige Variable x die obere Grenze.

Kapitel 7: Integralrechnung

1. Grundaufgaben der Integralrechnung $\surd$
2. Unbestimmtes Integral $\surd$
3. Bestimmtes Integral
4. Integrationsregeln
5. Uneigentliche Integrale
6. Anwendung der Integralrechnung in der Ökonomie

7.3 Bestimmtes Integral

- Aufgabenstellung: Der Inhalt eines krummlinig begrenzten Flächenstückes ist zu berechnen. Begrenzung durch Funktion, die Abszisse und die beiden Parallene zur y-Achse an den Stellen $x = a$ und $x = b$.

- Gegeben seien zwei feste Werte $a \leq b$. Dann heißt $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$ bestimmtes Integral über die Funktion $f(x)$ im Intervall $[a, b]$.

- Die Berechnung erfolgt, indem zunächst unbestimmt integriert und dann die Differenz der Funktionswerte $F(b) - F(a)$ gebildet wird, d.h.

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)|_a^b = F(b) - F(a).$$

Die Konstanten a und b heißen untere und obere Integrationsgrenze, $[a, b]$ Integrationsintervall und x Integrationsvariable.

Kapitel 7: Integralrechnung

1. Grundaufgaben der Integralrechnung $\surd$

2. Unbestimmtes Integral $\surd$

3. Bestimmtes Integral $\surd$

4. Integrationsregeln

5. Uneigentliche Integrale

6. Anwendung der Integralrechnung in der Ökonomie

7.4.1 Grundintegrale

- Die Lösungen einiger elementarer Integrale (sog. Grundintegrale) sind:

$$\int 0\,dx = C \quad \text{und} \quad \int 1\,dx = \int dx = x + C,$$

$$\int b\,dx = bx + C,$$

$$\int x^n\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C, \qquad n \neq -1,$$

$$\int 1/x\,dx = \ln|x| + C,$$

$$\int e^x\,dx = e^x + C,$$

$$\int a^x\,dx = \frac{a^x}{\ln(a)} + C, \qquad a > 0.$$

7.4.2 Linearitätseigenschaften

- Es gelten folgende Linearitätseigenschaften für Integrale

$$\int a \cdot f(x)dx = a \int f(x)dx, \qquad a \in \mathbb{R},$$

$$\int [f(x) + g(x)]dx = \int f(x)\,dx + \int g(x)\,dx.$$

- Außerdem dürfen bestimmte Integrale wie folgt aufgespalten werden:

$$\int_a^c f(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx$$

für $a < b < c$.

7.4.3 Partielle Integration

- Falls f und g integrierbar sind und stetige Ableitungen besitzen, so gilt:

$$\int f(x) \cdot g'(x)\, dx = f(x) \cdot g(x) - \int f'(x) \cdot g(x)\, dx,$$

$$\boxed{\int_a^b f(x) \cdot g'(x)\, dx = f(x) \cdot g(x) - \int_a^b f'(x) \cdot g(x)\, dx.}$$

- Hinweis: Diese Formel sollte immer dann benutzt werden, wenn sich eine Funktion als Produkt auffassen läßt, wobei der eine Faktor als Funktion, die sich leicht ableiten läßt ($f(x)$), und der andere Faktor als 1. Ableitung, die sich leicht integrieren läßt ($g'(x)$), interpretiert werden kann. Das Integral auf der rechten Seite ist somit einfacher zu berechnen als das Integral auf der linken Seite.

7.4.4 Integration durch Substitution

- Prinzip der Integration durch Substitution: Die Funktion $f(u)$ besitze die Stammfunktion $F(u)$, ferner sei $u = g(x)$ eine stetig diff'bare Funktion, wobei die zusammengesetzte Funktion $f(g(x))$ existiere. Dann gilt:

$$\int f(g(x)) \cdot g'(x)\,dx = \left[\int f(u)du\right]_{u=g(x)} = F(g(x)) + C.$$

- Einsatzmöglichkeiten:

1. Substituiere die Funktion $g(x)$ durch die neue Variable u.
2. Substituiere die Variable u durch $g(x)$. Aus $u = g(x)$ folgt:

$$du = g'(x)dx \text{ bzw. } dx = \frac{du}{g'(x)}.$$

Kapitel 7: Integralrechnung

1. Grundaufgaben der Integralrechnung $\surd$
2. Unbestimmtes Integral $\surd$
3. Bestimmtes Integral $\surd$
4. Integrationsregeln $\surd$
5. Uneigentliche Integrale
6. Anwendung der Integralrechnung in der Ökonomie

7.5 Uneigentliche Integrale

- Sind bei bestimmten Integralen die Integrationsgrenzen nicht endlich, oder gibt es beim Integranden im Intervall $[a;b]$ eine Stelle, an der die Funktion $f(x)$ unendlich ist, liegt ein sog. uneigentliches Integral vor, für das der Grenzwert gebildet wird. Existiert ein solcher Grenzwert, heißt das uneigentliche Integral konvergent:

$$\int_a^{\infty} f(x)dx = \lim_{b\to\infty} \int_a^b f(x)dx,$$

$$\int_{-\infty}^{b} f(x)dx = \lim_{a\to-\infty} \int_a^b f(x)dx,$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \lim_{c\to\infty} \int_{-c}^{c} f(x)dx.$$

- Übungsaufgabe 7.5.1: Bestimmen Sie $\int\limits_1^{\infty} \frac{1}{x^2}dx$.

Kapitel 7: Integralrechnung

1. Grundaufgaben der Integralrechnung $\surd$
2. Unbestimmtes Integral $\surd$
3. Bestimmtes Integral $\surd$
4. Integrationsregeln $\surd$
5. Uneigentliche Integrale $\surd$
6. Anwendung der Integralrechnung in der Ökonomie

7.6 Anwendung in der Ökonomie

1. Bestimmung der Konsumentenrente und Produzentenrente: Durch das Wechselspiel von Angebot und Nachfrage stellt sich auf dem Markt ein Gleichgewichtspreis für ein Gut ein, der sog. Marktpreis p_0, bei dem sich Angebot und Nachfrage ausgleichen. Nun gibt es potentielle Konsumenten, die einen höheren Preis als auch solche, die einen niedrigeren Preis zahlen würden. Diejenigen Konsumenten, die bereit sind, einen höheren Preis als den geforderten zu akzeptieren, erzielen beim Kauf zum Marktpreis eine Ersparnis, die man Konsumentenrente nennt. Manche Produzenten wären auch bereit, ihre Ware unter dem Marktpreis p_0 zu verkaufen. Für Sie ergibt sich beim Verkauf von x_0 ME des Gutes zum Marktpreis p_0 eine sog. Produzentenrente.

2. Übungsaufgabe: Berechnen Sie die anfallenden Produzenten- und Konsumentenrenten für die Angebotsfunktion $p(x) = 0.5x + 40$ sowie die Nachfragefunktion $p(x) = -2x + 80$.

7.6 Anwendung in der Ökonomie II

2. Bestimmung der Gesamtkosten- und der Gesamterlösfunktion: Da die Integralrechnung ja bekanntlich als Umkehrung der Differentialrechnung angesehen werden kann, ist diese da einzusetzen, wo aus bekannten Grenzfunktionen (z.B. Grenzkosten und Grenzerlöse) die zugehörigen Gesamtfunktionen (z.B. Gesamtkosten und Gesamterlöse) gesucht werden. Dabei wird das bestimmte Integral mit variabler oberer Grenze verwendet.

   Aus dem Integral der Grenzkosten $K'(x)$ ergibt sich als Stammfunktion die Gesamtkostenfunktion $K(x) + C$, wobei $K(x) = K_v(x)$ die variablen Kosten und $C = K_f$ die Fixkosten darstellen, d.h.

$$\int K'(x)\,dx = K(x) + C = K_v(x) + K_f.$$

   Aus dem Integral der Grenzerlöse $U'(x)$ ergibt sich als Stammfunktion die Gesamterlösfunktion $U(x) + C$. Die Integrationskonstante C gibt hier den Umsatz bei $x = 0$ an, also folgt $C = 0$. Es gilt: $\int U'(x)\,dx = U(x) + C = U(x)$.

Kapitel 8: Matrizenrechnung

1. Grundbegriffe

2. Operationen mit Matrizen

3. Linearkombination, lineare Abhängig- und Unabhängigkeit

4. Inverse einer Matrix

5. Rang einer Matrix

8.1.0 Motivation

- Durch Matrizen können lineare Beziehungen (die sehr häufig bei ökonomischen Aufgabenstellungen auftreten) sehr übersichtlich dargestellt werden.

- Matrizenrechnung ist Grundlage für die Lösung linearer Gleichungssysteme (Kapital 9) und Lösung der Aufgaben der linearen Optimierung (Kapitel 10).

- Einführungsbeispiel: Das Unternehmen Innovativ AG stellt auf zwei Maschinen $M1$ und $M2$ aus den Rohstoffen $R1$ und $R2$ die Produkte $P1$, $P2$ und $P3$ her. Für die Produktion einer Mengeneinheit (ME) der Produkte wird von folgendem Bedarf ausgegangen:

	Maschine 1 Produkte			Maschine 2 Produkte		
Rohstoffe	P1	P2	P3	P1	P2	P3
R1	2	3	4	3	3	2
R2	3	1	2	3	1	2

8.1.1 Matrixdefinition I

- Eine Matrix ist ein rechteckiges nach m Zeilen und n Spalten geordnetes Schema von $m \cdot n$ Zahlen.

- Für Maschine $M1$ aus dem Einführungsbeispiel korrespondiert folgende Matrix:

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

- Für Maschine $M2$ aus dem Einführungsbeispiel korrespondiert folgende Matrix:

$$\begin{bmatrix} 3 & 3 & 2 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

8.1.1 Matrixdefinition II

- Die Zahlen, aus denen die Matrix besteht, heißen Elemente der Matrix.

- Matrizen werden durch die Darstellung ihrer Elemente angegeben. Dazu wird das rechteckige Schema in eckige (oder runde) Klammern eingeschlossen.

- Zur Charakterisierung der Stellung der Elemente innerhalb einer Matrix werden die Elemente mit doppelten Index (1. Index=Zeilenindex, 2. Index=Spaltenindex) versehen. Es ergibt sich damit folgende allgemeine Matrizennotation:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}.$$

  Diese Zusammenfassung wird als $(m, n)-$Matrix bezeichnet ("m Kreuz n").

- Symbole für Matrizen: i.a. große lateinische Buchstaben, evtl. mit einem Index.

8.1.1 Matrixdefinition III

- Vektoren sind Matrizen, die nur aus einer Zeile oder einer Spalte bestehen.
- Symbole für Vektoren: i.a. große lateinische Buchstaben, evtl. mit einem Index.
- Die Zeilen und Spalten einer $(m \times n)-$Matrix ergeben die folgenden Vektoren:

$$a^{(i)} = \begin{bmatrix} a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{in} \end{bmatrix}$$ i-ter Zeilenvektor,

$$a^{(j)} = \begin{bmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{bmatrix}$$ i-ter Spaltenvektor.

- Im folgenden soll unter einem Vektor stets ein Spaltenvektor verstanden werden.
- Skalar: Eine Matrix mit einer Zeile und einer Spalte, d.h. eine einzelne Zahl.

8.1.2 Typ der Matrix und Gleichheit von Matrizen

- Wichtig für die Vergleichbarkeit von Matrizen ist deren Typ (d.h. die Anzahl der Spalten sowie die Anzahl der Zeilen). Eine Matrix mit m Zeilen und n Spalten heißt Matrix vom Typ (m, n), oft auch kurz $A_{(m,n)}$.

- Quadratische Matrizen: Matrizen mit n Spalten und n Zeilen. Für diese Matrizen definiert man:

  1. Hauptdiagonale: Elemente, bei denen der Zeilen und der Spaltenindex übereinstimmen.
  2. Nebendiagonale: Elemente auf der Diagonale "von links unten nach rechts oben".

- Zwei Matrizen vom gleichen Typ heißen gleich, falls sie in allen entsprechenden Elementen übereinstimmen, d.h. wenn gilt: $a_{ij} = b_{ij}$.

- Eine Matrix A heißt größer (kleiner) als eine Matrix B, wenn beide Matrizen vom gleichen Typ sind und wenn jedes Element von A größer (kleiner) ist als das entsprechende Element von B, d.h. wenn gilt: $a_{ij} > b_{ij}$.

8.1.3 Spezielle Matrizen

- Diagonalmatrix: Quadratische Matrix, bei der alle Elemente außerhalb der Hauptdiagonale gleich Null und mindestens ein Element auf der Hauptdiagonale von Null verschieden ist.

- Skalarmatrix: Diagonalmatrix, bei der alle Elemente auf der Hauptdiagonalen gleich sind.

- Einheitsmatrix: Diagonalmatrix, deren sämtliche Elemente der Hauptdiagonalen gleich Eins sind.

- Obere Dreiecksmatrix: Quadratische Matrix, bei der alle Elemente unterhalb der Hauptdiagonalen gleich Null sind.

- Nullmatrix: Matrix, deren sämtliche Elemente gleich Null sind.

- Symmetrische Matrix: Matrix, deren Elemente an der Hauptdiagonalen gespiegelt werden können, d.h. mit $a_{ij} = a_{ji}$.

Kapitel 8: Matrizenrechnung

1. Grundbegriffe $\surd$
2. Operationen mit Matrizen
3. Linearkombination, lineare Abhängig- und Unabhängigkeit
4. Inverse einer Matrix
5. Rang einer Matrix

8.2.1 Transponieren von Matrizen

- Werden bei einer gegebenen Matrix $A_{m,n}$ die Zeilen mit den Spalten vertauscht, so entsteht die zu $A_{(m,n)}$ transponierte Matrix $A^T_{(m,n)}$ bzw. $A'(m,n)$.

- Beachte:

  1. Beim Transponieren ändert sich (außer bei quadratischen Matrizen) der Typ der Matrix.
  2. Für symmetrische Matrizen gilt: $A = A^T$.

- Beispiel:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix} \Longrightarrow A^T = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 1 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}.$$

8.2.2 Addition und Subtraktion von Matrizen

- Addition und Subtraktion: Matrizen gleichen Typs A und B werden addiert (subtrahiert), indem ihre entsprechenden Elemente addiert (subtrahiert) werden:

$$A \pm B = C \quad \text{mit} \quad a_{ij} \pm b_{ij} = c_{ij} \quad (i = 1, \ldots m, \quad i = 1, \ldots n).$$

- Assoziativgesetz:

$$(A + B) \pm C = A + (B \pm C).$$

- Kommutativgesetz:

$$A + B = B + A.$$

8.2.3 Multiplikation einer Matrix mit einem Skalar

- Multiplikation mit einem Skalar: Eine Matrix A wird mit einem Skalar multipliziert, indem jedes Element der Matrix mit diesem Faktor multipliziert wird, d.h.
$$c \cdot A = B \quad \text{mit} \quad c \cdot a_{ij} = b_{ij} \quad (i = 1, \ldots m, \quad i = 1, \ldots n).$$

- Distributivgesetz:
$$c \cdot (A \pm B) = c \cdot A \pm c \cdot B,$$
$$(c_1 + c_2) \cdot A = c_1 \cdot A \pm c_2 \cdot A.$$

- Assoziativgesetz:
$$c_1 \cdot c_2 \cdot A + c_1 \cdot (c_2 \cdot A).$$

- Kommutativgesetz:
$$c \cdot A = A \cdot c.$$

8.2.4 Skalarprodukt

- Das Skalarprodukt eines Zeilenvektor a^T mit einem Spaltenvektor b ist ein Skalar s, der dadurch entsteht, daß die einander entsprechenden Vektorkomponenten von a^T und b multipliziert und die so entstandenen Produkte aufsummiert werden, d.h.

$$
\begin{aligned}
s &= a^T \cdot b = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_n \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} \\
&= a_1 b_1 + a_2 b_2 + \ldots + a_n b_n \\
&= \sum_{i=1}^{n} a_i b_i .
\end{aligned}
$$

- Beachte: Skalarprodukt kann nur berechnet werden, falls beide Vektoren die gleiche Zahl von Komponenten aufweisen.

8.2.5 Matrizenmultiplikation I

- Eine Matrix $C_{(m,n)}$, deren Elemente c_{ij} als Spaltenvektor des i-ten Zeilenvektors einer Matrix $A_{(m,p)}$ und des j-ten Spaltenvektors einer Matrix $B_{(p,n)}$ gebildet werden, heißt das Produkt der Matrizen $A_{(m,p)}$ und $B_{(p,n)}$. D.h.

$$\begin{aligned} c_{ij} &= a_i^T \cdot b_j, \\ &= \sum_{k=1}^{p} a_{ik} \cdot b_{kj}, \quad i = 1, \ldots, m, \quad j = 1, \ldots, n. \end{aligned}$$

- Assoziativgesetz:

$$A(BC) = (AB)C.$$

- Distributivgesetz:

$$A(B + C) = AB + AC.$$

- Achtung: Die Matrizenmultiplikation ist nicht kommutativ, d.h. i.a. gilt:

$$AB \neq BA.$$

8.2.5 Matrizenmultiplikation II

- Verkettungsbedingung: $A_{(m,p)} \cdot B_{(p,n)} = C_{(m,n)}$
  d.h. die Anzahl der Spalten der Matrix A ist gleich der Anzahl der Zeilen der Matrix B.

- Ist in einer Matrizenmultiplikation ein Faktor die Nullmatrix und die Multiplikation nach der Verkettungsbedingung ausführbar, so ist das Ergebnis die Nullmatrix, deren Typ nach obiger Bedingung bestimmt ist:

$$\mathbf{0}_{(m,p)} \cdot A_{(p,n)} = \mathbf{0}_{(m,n)}, \quad A_{(m,p)} \cdot \mathbf{0}_{(p,n)} = \mathbf{0}_{(m,n)}$$

- Das Produkt einer Matrix A mit der Einheitsmatrix ergibt wieder die Matrix A:

$$\mathbf{I}_{(m,m)} \cdot A_{(m,n)} = A_{(m,n)}, \quad A_{(m,n)} \cdot \mathbf{I}_{(n,n)} = A_{(m,n)}$$

Kapitel 8: Matrizenrechnung

1. Grundbegriffe $\surd$
2. Operationen mit Matrizen $\surd$
3. Linearkombination, lineare Abhängig- und Unabhängigkeit
4. Inverse einer Matrix
5. Rang einer Matrix

8.3.1 Linearkombinationen von Vektoren

- Ein Vektor a heißt Linearkombination der Vektoren a_i, wenn er durch die Vorschrift

$$a = x_1 a_1 + x_2 a_2 + \ldots + x_n a_n = \sum_{i=1}^{n} x_i a_i$$

gebildet wurde, wobei die x_i Skalare sind. Beachte: Alle Vektoren einer Linearkombination müssen die gleiche Anzahl Komponenten aufweisen.

- Beispiel:

$$\begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix} = 2 \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} + 1 \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

8.3.2 Lineare Abhängigkeit und Unabhängigkeit von Vektoren

- Eine Linearkombination von Vektoren ist stets wieder ein Vektor. U.U. kann der Nullvektor als Linearkombination von Vektoren entstehen, die selber nicht sämtlich Nullvektoren sind. Offensichtlich gilt:

$$a = \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot a_i = 0, \text{ falls alle } x_i = 0.$$

  Diese Bildung des Nullvektors wird als "trivial" bezeichnet.

- Die Vektoren $a_1, \ldots, a_n$ heißen linear unabhängig, wenn der Nullvektor ausschließlich auf triviale Weise als Linearkombination dieser Vektoren erzeugt werden kann.

- Die Vektoren $a_1, \ldots, a_n$ heißen linear abhängig, wenn der Nullvektor auch auf nicht-triviale Weise als Linearkombination dieser Vektoren erzeugt werden kann.

- Die Einheitsvektoren sind immer linear unabhängig.

Kapitel 8: Matrizenrechnung

1. Grundbegriffe $\surd$
2. Operationen mit Matrizen $\surd$
3. Linearkombination, lineare Abhängig- und Unabhängigkeit $\surd$
4. Inverse einer Matrix
5. Rang einer Matrix

8.4 Inverse einer Matrix I

- Eine quadratische Matrix A^{-1}, die mit der quadratischen Matrix A von links oder von rechts multipliziert die Einheitsmatrix I ergibt, heißt inverse Matrix bzw. Kehrmatrix zu A, d.h. es gilt:

$$A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = I.$$

- Anwendung: Gegeben sei folgende lineare Beziehung

$$y = A \cdot x.$$

Möchte man diese Gleichung nach x auflösen, ist die Inverse einer Matrix zu berechnen und von links zu multiplizieren:

$$x = A^{-1} \cdot y.$$

- Frage: Wie berechnet man die Inverse einer Matrix? Hier: Gauß'sches Eliminationsverfahren.

8.4 Inverse einer Matrix II

- Gauß'sches Eliminationsverfahren: Zur Bestimmung der inversen Matrix A^{-1} erweitert man die vorliegende Matrix A um die zugehörige Einheitsmatrix I. Dann transformiert man mit Hilfe von Zeilenoperationen $A|I$ so, daß an der Stelle von A die Einheitsmatrix I tritt. Anstelle von I erscheint dann die gesuchte inverse Matrix A^{-1}. Die Erweiterung $A|I$ wird somit transformiert in $I|A^{-1}$, d.h. es gilt:

$$\left[\begin{array}{ccc|cccc} a_{11} & \dots & a_{1n} & 1 & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & \dots & a_{2n} & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \Rightarrow \left[\begin{array}{cccc|ccc} 1 & 0 & \dots & 0 & a'_{11} & \dots & a'_{1n} \\ 0 & 1 & \dots & 0 & a'_{21} & \dots & a'_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 1 & a'_{m1} & \dots & a'_{mn} \end{array}\right]$$

- Zugelassene Transformationen:

1. Multiplikation einer Zeile mit einer Zahl ungleich Null.
2. Addition einer mit einem Skalar multiplizierten Zeile zu einer anderen.
3. Vertauschen zweier Zeilen.

8.4 Inverse einer Matrix II

- Hinweise:

  1. Ist die Einheitsmatrix nicht zu erzeugen, existiert für die Matrix keine Inverse, d.h. nicht jede Matrix hat eine Inverse.
  2. Rechnen Sie mit gebrochenen Zahlen, nicht mit Dezimalzahlen.

Kapitel 8: Matrizenrechnung

1. Grundbegriffe $\surd$
2. Operationen mit Matrizen $\surd$
3. Linearkombination, lineare Abhängig- und Unabhängigkeit $\surd$
4. Inverse einer Matrix $\surd$
5. Rang einer Matrix

8.5 Rang einer Matrix I

- Die maximale Anzahl linear unabhängiger Vektoren einer $(m \times n)-$Matrix A wird als Rang dieser Matrix $(rg(A))$ bezeichnet.

- Es gilt allgemein für den Rang einer $(m \times n)-$Matrix A:

$$rg(A) \leq \min(m, n).$$

- Außerdem ist für jede Matrix der Zeilenrang (=maximale Anzahl linear unabhängiger Zeilenvektoren) gleich dem Spaltenrang (=maximale Anzahl linear unabhängiger Spaltenvektoren). Es reicht daher nur vom Rang zu sprechen.

- Frage: Wie kann der Rang bestimmt werden? Hier: Variante des Gauß'schen Eliminationsverfahren.

8.5 Rang einer Matrix II

- Idee: Da das Gauß' sche Eliminationsverfahren ausschließlich aus rangerhaltenden Transformationen besteht, kann man eine Matrix mit dessen Hilfe auf obere Dreiecksgestalt bringen, ohne daß sich der Rang der Matrix ändert. Bei $(m \times n)$-Matrizen A mit oberer Dreiecksgestalt bestimmt sich der Rang $rg(A)$ aus der Anzahl der Zeilen, die keine Nullzeilen sind.

- Rangerhaltende Transformationen sind

  1. Vertauschen zweier Zeilen einer Matrix.
  2. Vertauschen zweier Spalten einer Matrix.
  3. Multiplikation einer Zeile oder Spalte mit einer Konstanten $c \neq 0$.
  4. Addition eines Vielfachen einer Zeile (bzw. Spalte) zu einer anderen Zeile (bzw. Spalte).

- Eine quadratische $n \times n$-Matrix heißt regulär, wenn der Rang von A gleich n ist. Ansonsten heißt diese Matrix singulär.

Kapitel 9: Lineare Gleichungssysteme

1. Grundbegriffe

2. Kriterien für die Lösbarkeit linearer Gleichungssysteme

3. Lösungsverfahren für lineare Gleichungssysteme

9.1 Grundlagen I

- Als lineares Gleichungssystem mit m Gleichungen und n Variablen (Unbekannten) wird ein System mit folgender Form bezeichnet:

$$
\begin{aligned}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots a_{1n}x_n &= b_1 \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots a_{2n}x_n &= b_2 \\
&\vdots \\
a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots a_{mn}x_n &= b_m
\end{aligned}
$$

- Bekannt: a_{ij}, b_i. Gesucht: x_j $(1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n)$.

- Lösung: Jedes n-Tupel von Zahlen $x_1, \ldots, x_n$, das zugleich jede Gleichung des Systems in eine wahre Aussage überführt.

9.1 Grundlagen II

- Darstellung in Matrixschreibweise: $A_{(m,n)} \cdot x_{(n,1)} = b_{(m,1)}$:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}.$$

- Darstellung als Linearkombination der Spaltenvektoren der Koeffizientenmatrix:

$$\begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{bmatrix} \cdot x_1 + \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{bmatrix} \cdot x_2 + \ldots + + \begin{bmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{bmatrix} \cdot x_n = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

9.1 Grundlagen III

- Beispiel (Forsetzung): Die Innovativ AG stellt 2 Produkte P1 und P2 auf den beiden Maschinen M1 und M2 wie folgt her:

	P1 [Mh/ME]	P2 [Mh/ME]	Gseamtkapazität [Mh]
M1	1	5	20
M2	3	1	18

Für die Innovativ AG stellt sich die Frage, wieviel sie von jedem Produkt herstellen soll, um beide Maschinen auszulasten.

Analytische Lösung: Lösung des Gleichungssystems

$$\begin{bmatrix} x_1 + 5x_2 = 20 \\ 3x_1 + x_2 = 18 \end{bmatrix}$$

Grafische Lösung: Schnittpunkt der Geraden $x_2 = 4 - 1/5x_1$ und $x_2 = 18 - 3x_1$.

Kapitel 9: Lineare Gleichungssysteme

1. Grundbegriffe $\surd$

2. Kriterien für die Lösbarkeit linearer Gleichungssysteme

3. Lösungsverfahren für lineare Gleichungssysteme

9.2 Kriterien für die Lösbarbeit linearer Gleichungssysteme I

- Betrachte zuerst ein allgemeines lineares 2×2-Gleichungssystem. Es können zwei Fälle auftreten:

  1. Gleichungssytem unlösbar: Es gibt keine Lösung, da beide Geraden parallel verlaufen.
  2. Gleichungssytem lösbar: Es existiert genau eine Lösung, da sich beide Geraden schneiden oder es gibt unendlich viele Lösungen, da beide geraden zusammenfallen.

- Betrachte ein allgemeines lineares $m \times n$-Gleichungssystem. Es können folgende Fälle auftreten:

  1. Es existiert genau eine Lösung.
  2. Es gibt gar keine Lösung.
  3. Es gibt unendlich viele Lösungen.

9.2 Kriterien für die Lösbarbeit linearer Gleichungssysteme II

- Die Untersuchung des Lösungsverhaltens eines linearen Gleichungssystems besteht Vergleich des Ranges der Koeffizienmatrix $A_{m,n}$ mit dem Rang der erweiterten Koefizientenmatrix $(A|b)_{m,n+1}$. Die erweiterte Koeffizientenmatrix ist die um die Spalte $b_{(m,1)}$ der Absolutglieder erweiterte Koeffzientenmatrix $A_{m,n}$.

- Aussagen bzgl. der Lösbarkeit:

1. Lineares Gleichungssystem hat genau dann eine nichtleere Lösungsmenge ("mindestens eine Lösung"), wenn $rg(A) = rg(A|b)$.
2. Lineares Gleichungssystem hat genau dann eine eindeutige Lösungsmenge, wenn $rg(A) = rg(A|b) = n$.
3. Lineares Gleichungssystem hat genau eine unendliche Lösungsmenge, wenn $rg(A) = rg(A|b) < n$. Die Differenz $n - rg(A)$ ist die Zahl der sogenannten Freiheitsgrade, d.h. sie gibt die Zahl der freien Variablen an, die beliebig gesetzt werden können.

9.2 Kriterien für die Lösbarbeit linearer Gleichungssysteme III

- Ein lineares Gleichungssystem, für das der Vektor der Absolutglieder b ein Nullvektor ist, heißt ein homogenes Gleichungssystem. Bei einem homogenen Gleichungssystem ist eine sog. triviale Lösung immer der Nullvektor.

- Ein lineares Gleichungssystem, für das der Vektor der Absolutglieder b ein Nullvektor ist, heißt ein inhomogenes Gleichungssystem.

- Ein homogenes Gleichungssystem hat eine triviale Lösung dann und nur dann, wenn gilt
$$rg(A) < n.$$
Gilt dagegen
$$rg(A) = n,$$
existiert nur die triviale Lösung.

Kapitel 9: Lineare Gleichungssysteme

1. Grundbegriffe $\surd$

2. Kriterien für die Lösbarkeit linearer Gleichungssysteme $\surd$

3. Lösungsverfahren für lineare Gleichungssysteme

9.3.1 Gauß'sches Eliminationsverfahren

- Gauß'sches Eliminationsverfahren: Zur Bestimmung der Lösung x erweitert man die vorliegende Matrix A um den Vektor der Absolutglieder b. Dann transformiert man mit Hilfe von Zeilenoperationen $A|b$ so, daß an der Stelle von A die Einheitsmatrix I tritt. Anstelle von b erscheint dann die gesuchte Lösung x.

- Beachte: Ergeben sich beim Eliminationsverfahren in einer Zeile nur Nullen, ist das linear Gleichungssystem nicht eindeutig lösbar.

9.3.2 Lösung mittels der Inversen

- Lösung mit Hilfe des Inversen: Vorausetzung dafür ist, daß
  - die Koeffizientenmatrix A quadratisch ist $(m = n)$ und
  - die Koeffizientenmatrix A invertierbar ist.

  Dann läßt sich das Gleichungssystem

$$Ax = b$$

  auflösen und man erhält die Lösungsmenge

$$x = A^{-1}b,$$

  indem man die inverse Matrix von links mit dem Vektor der Absolutglieder multipliziert.

9.3.3 Gauß'scher Algorithmus

- Gauß'scher Algorithmus: Lediglich in der letzten Zeile der erweiterten Koeffizientenmatrix $(A|b)$ läßt man durch äquivalente Transformationen alle Variablen – bis auf die letzte – verschwinden. Dort läßt sich dann die Lösung für x_n in der letzten Spalte ablesen.
  In der vorletzten Zeile sind anschließend alle Variablen $x_j, \quad 1 \leq j < n-1$ zum Verschwinden zu bringen. D.h. in der vorletzten Zeile treten nur noch x_{n-1} und x_n auf. Durch Einsetzen der Lösung für x_n läßt sich die Lösung für x_{n-1} ermitteln. Analog geht man dann in den nächst höheren Zeilen vor.

- D.h. man formt die Koeffizientenmatrix $(A|b)$ in eine obere Dreiecksmatrix um, wodurch sich nach der Lösung für die letzte Variable aus der letzten Zeile durch sukzessives Einsetzen die Lösung(en) in die jeweils nächst höhere Zeile die weiteren Variablen bestimmen lassen.

Kapitel 10: Lineare Optimierung

10.1 Modell der linearen Optimierung: Problemstellung

- Optimierung: Verfahren zur Maximierung oder Minimierung einer bestimmten Zielgröße (Zielfunktion) unter Berücksichtigung der vorhandenen Möglichkeiten (Nebenbedingungen/Restriktionen).

- Lineare Optimierung: Zielfunktion und Nebenbedingungen (meist Ungleichungen) liegen in linearer Form vor.

  Dabei soll das zu erreichende Ziel möglichst groß oder möglichst klein sein, d.h. es soll ein Optimum werden. Solche Zielsetzungen, sog. Optimierungskriterien, können sein:

  – Erreichen einer maximalen Kapazitätsauslastung / maximalen Gewinns,
  – Bestimmung eines minimalen Materialverbrauchs / minimaler Stückkosten.

  Das Optimum kann jedoch nur unter Einhaltung bestimmter Bedingungen erreicht werden, z.B. Lohnkosten, Materialkontingente und Lagermöglichkeiten (sog. Restriktionen bzw. Nebenbedingungen).

10.1 Modell der linearen Optimierung: Beispiel 1/2

- Problemstellung: Ein Unternehmen stellt zwei Produkte her, für deren Produktion drei verschiedene Rohstoffe benötigt werden, die nur in begrenztem Umfang zur Verfügung stehen. Die benötigten sowie die zur Verfügung stehenden Mengen sowie der Gewinn je Produkt ist in nachfolgender Tabelle zusammengefasst:

	Technische Koeffizienten (ME)		Zur Verfügung stehende Rohstoffmenge
	Produkt P1	Produkt P2	
Rohstoffmenge R1	4	8	32
Rohstoffmenge R2	4	2	20
Rohstoffmenge R3	0	8	24
Gewinn	20	30	

Wieviel ME muß das Unternehmen von den einzelnen Produkten herstellen, um einen maximalen Gewinn zu erzielen?

10.1 Modell der linearen Optimierung: Beispiel 2/2

- Formulierung als lineares Optimierungsproblem: Es bezeichne x_1 bzw. x_2 die zu wählenden Mengeneinheiten der Produkte P1 bzw. P2.
  - Zielfunktion: Aufgrung des Gewinnmaximierungsziels folgt:

$$z = f(x_1, x_2) = 20x_1 + 30x_3 \stackrel{!}{=} \max$$

  - Nebenbedingungen: Die Restriktionen bzgl. der Rohstoffmengen implizieren:

$$4x_1 + 8x_2 \leq 32$$

$$4x_1 + 2x_2 \leq 20$$
$$8x_2 \leq 24$$

  - Nichtnegativitätsbedingung: Es dürfen nur positive Mengen produziert werden:

$$x_1 \geq 0$$
$$x_2 \geq 0$$

10.1 Modell der linearen Optimierung

- Allgemeine Formulierung als lineares Optimierungsproblem: Es bezeichne $x_1, \ldots, x_n$ die zu wählenden Variablen und $x' = (x_1, \ldots, x_n)$. Dann kann das lineare Optimierungsproblem allgemein wie folgt formuliert werden:
  - Zielfunktion: Aufgrung des Gewinnmaximierungsziels folgt:

$$z = f(x_1, \ldots, x_n) = c_1 x_1 + \ldots + c_n x_n \stackrel{!}{=} \max / \min$$

  - Nebenbedingungen in Matrixschreibweise:

$$Ax \, (\leq, =, \geq) \, b$$

  - Nichtnegativitätsbedingung:

$$x \geq 0$$

Kapitel 10: Lineare Optimierung

1. Modell der linearen Optimierung $\surd$

2. Grafische Lösung mit zwei Variablen

3. Numerische Lösung mit Hilfe des Simplex-Algorithmus

10.2.1 Lösungsmenge eines Systems linearer Ungleichungen mit zwei Variablen I

- Beschränkung auf lineare Optimierungsaufgabe mit 2 unabhängigen Variablen.

- Grundidee: Lineare Ungleichungen lassen sich durch äquivalente Transformationen immer auf folgende Gestalt bringen:

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \leq b_1.$$

- Unter einer Lösungsmenge L einer linearen Ungleichung mit zwei Variablen sind alle geordneten Zahlenpaare (x_1, x_2) zu verstehen, welche die Ungleichung bezüglich der Grundmenge in eine wahre Aussage überführen, d.h. es gilt:

$$\mathrm{L} = \{(x_1, x_2) | (x_1, x_2) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \wedge a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \leq b_1\}$$

10.2.1 Lösungsmenge eines Systems linearer Ungleichungen mit zwei Variablen II

- Betrachtet werden soll die Ungleichung

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \leq b_1.$$

mit $a_{11} \neq 0$ und $a_{12} \neq 0$ (1. Fall).

- Ausgangspunkt der Diskussion ist die lineare Gleichung (Gerade)

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1,$$

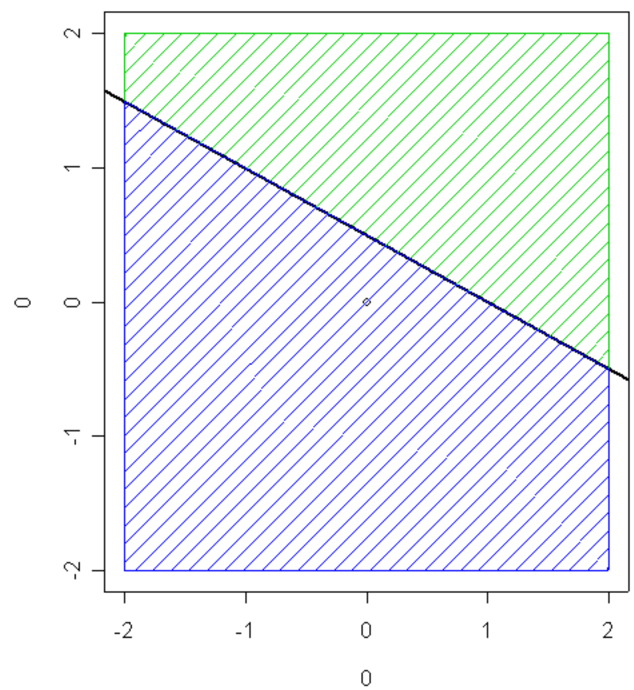
welche die $x_1 - x_2-$Ebene in zwei Teile zerlegt. Diese Gerade ist durch zwei Punkte bestimmt. Wähle die Schnittpunkte mit den Koordinatenachsen, also die Punkte

$$(b_1/a_{11}, 0) \text{ und } (0, b_1/a_{12}).$$

Die Lösungsmenge der Ungleichung ist also die Menge unterhalb der Geraden (Ist das Ungleichheitszeichen in der Ungleichung vertauscht, ist die Menge die Gerade oberhalb).

10.2.1 Lösungsmenge eines Systems linearer Ungleichungen mit zwei Variablen III

- Beispiel: Die Lösungsmenge der Gleichung $2x_1 + 4x_2 \leq 2$ bzw. $2x_1 + 4x_2 \geq 2$ ist gegeben durch die blaue bzw. die grüne Fläche.



10.2.1 Lösungsmenge eines Systems linearer Ungleichungen mit zwei Variablen IV

- Betrachtet werden soll die Ungleichung

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \leq b_1.$$

mit $a_{11} \neq 0$ und $a_{12} = 0$ (2. Fall).

- Ausgangspunkt der Diskussion ist die lineare Gleichung (Gerade)

$$a_{11}x_1 = b_1,$$

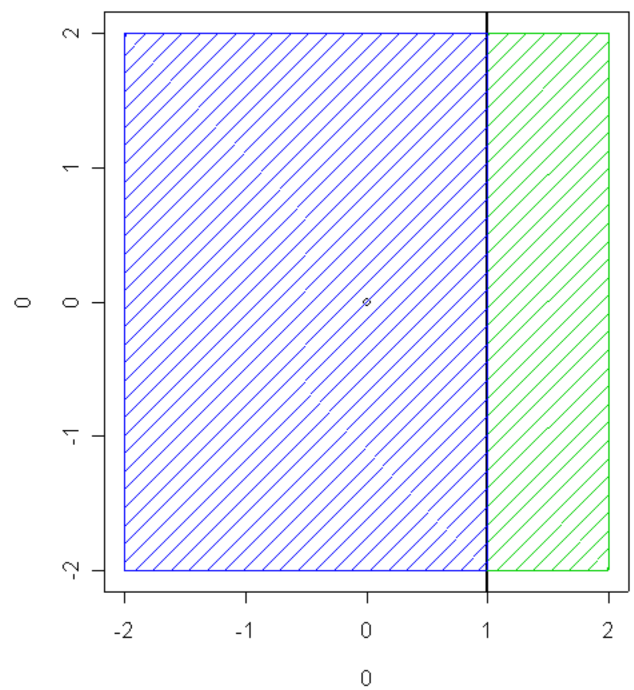
welche die $x_1 - x_2-$Ebene in zwei Teile zerlegt. Diese Gerade ist durch einen Punkte bestimmt. Wähle den Schnittpunkte der x_1-Koordinatenachsen, also den Punkte

$$(b_1/a_{11}, 0).$$

Die Lösungsmenge der Ungleichung ist also die Menge links der Geraden (Ist das Ungleichheitszeichen in der Ungleichung vertauscht, ist die Menge die Gerade rechts).

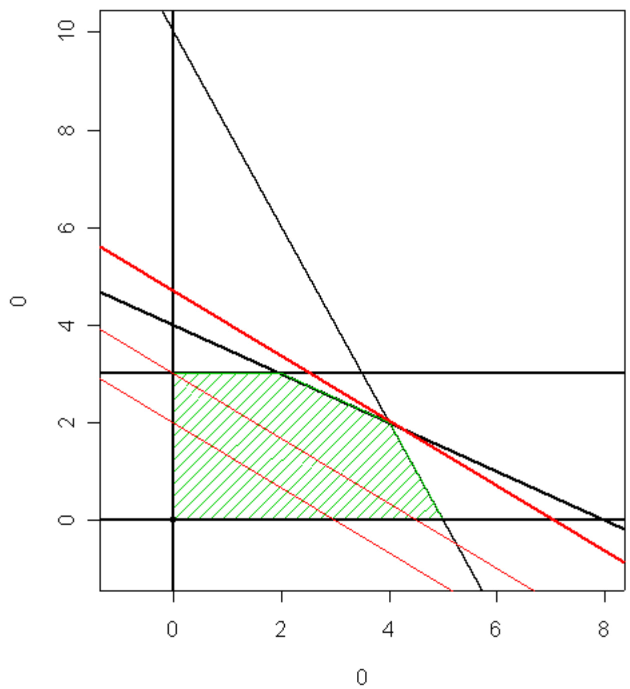
10.2.1 Lösungsmenge eines Systems linearer Ungleichungen mit zwei Variablen V

- Beispiel: Die Lösungsmenge der Gleichung $2x_1 \leq 2$ bzw. $2x_1 \geq 2$ ist gegeben durch die blaue bzw. die grüne Fläche.



10.2.2 Optimale Lösung für zwei Variablen I

- Nachfolgende Grafik zeigt das Bild der Lösungsmenge (straffiert) des vorangegangenen Beispiels für das Unternehmen, das seinen Gewinn maximieren möchte.



10.2.2 Optimale Lösung für zwei Variablen II

- Lösungsmenge durch die grüne Fläche (inkl. Randpunkte) dargestellt. Die Koordinaten x_1 und x_2 aller Punkte des Lösungsbereichs liefern, eingesetzt in die Zielfunktion, zulässige Lösungen des Optimierungsproblems. Ziel ist es nun, aus diesen unendlichen vielen Lösungen die optimale Lösung zu bestimmen.

- Zu diesem Zweck wird die Gleichung der Zielfunktion in die grafische Darstellung in Form von sog. Niveaulinien mit einbezogen. Niveaulinien sind Geraden, die ein Niveau des z-Wertes widerspiegeln, z.B. $20x_1 + 30x_2 = 60$ zum Niveau 60.

- Von Interesse im Sinne der linearen Optimierung sind ausschließlich Niveaulinien, die mit dem Lösungsbereich mindestens einen Punkt gemeinsam haben.

- Alle Niveaulinie verlaufen parallel, da in der Funktionsgleichung die beiden Koeffizienten von x_1 und x_2 unverändert bleiben. Eine Verschiebung der Niveaulinie nach rechts bedeutet ein höheres Niveau (hier Gewinn).

- Konsequenz: Optimale Lösung durch Tangente der Niveaulinie an Lösungsbereich.

Kapitel 10: Lineare Optimierung

1. Modell der linearen Optimierung $\surd$
2. Grafische Lösung mit zwei Variablen $\surd$
3. Numerische Lösung mit Hilfe des Simplex-Algorithmus

10.3 Numerische Lösung mittels Simplex-Verfahren I

- Grafische Lösung nur für Optimierungsprobleme mit maximal 2 Variablen anwendbar.
- Jetzt: Numerischer Algorithmus zur Lösung linearer Optimierungsprobleme, der sog. Simplex-Algorithmus.
- Nicht behandelt werden Sonderfälle wie unendlich viele optimale Punkte, Degeneration, unbeschränkter zulässiger Bereich oder Nichtexistenz von zulässigen Punkten.
- Beschränkung auf Maximimierungsproblem.

10.3 Numerische Lösung mittels Simplex-Verfahren II

- Umformulierung des linearen Optimierungsproblems:
  - Zielfunktion: $z = f(x_1, x_2) = 20x_1 + 30x_3 \stackrel{!}{=} \max.$
  - Nebenbedingungen: Die Restriktionen bzgl. der Rohstoffmengen implizieren eine modifizierte Nebenbedingung. Hier werden durch sog. Schlupfvariablen oder Basisvariablen (BV) s_1, s_2, s_3 aus den Ungleichungen nun Gleichungen.

$$4x_1 + 8x_2 + s_1 = 32$$

$$4x_1 + 2x_2 + s_2 = 20$$
$$8x_2 + s_3 = 24$$

    Die Variablen x_1, x_2 werden auch Nichtbasisvariablen (NBV) genannt.
  - Nichtnegativitätsbedingung: Es dürfen nur positive Mengen produziert werden bzw. Schlupfvariablen dürfen ebenfalls nur positiv sein: $x_1\, x_2, s_1, s_2, s_3 \geq 0$.
  - Setzt man $x_j = 0$, dann ergibt sich als spezielle Lösung die sog. Basislösung $s_j = b_j$.

10.3 Numerische Lösung mittels Simplex-Verfahren III

- Grundprinzip des Simplexverfahrens:

  1. Ausgangspunkt ist eine zulässige Basislösung, d.h. ein Eckpunkt des zulässigen Bereichs. Man wählt die Schlupfvariablen als Basisvariablen, die ökonomischen Variablen werden Null gesetzt.

  2. Mit Hilfe eines Abbruchkriteriums wird entschieden, ob der optimale Punkt schon erreicht ist.

  3. Kern der Methode ist ein Algorithmus, der festlegt, wie eine nicht optimale zulässige Basislösung überführt wird in eine zulässige Basislösung mit größeren Zielfunktionswert. Dies entspricht grafisch dem Übergang von einem Eckpunkt in einen benachbarten entlang einer Kante mit möglichst großem Anstieg der Zielfunktion.

10.3 Numerische Lösung mittels Simplex-Verfahren IV

- Arbeiten mit Simplextableau:

BV / NBV	x_1	x_2	$\dots$	x_n	b
s_1	a_{11}	a_{12}	$\dots$	a_{1n}	b_1
s_2	a_{21}	a_{22}	$\dots$	a_{2n}	b_2
$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$
s_m	a_{m1}	a_{m2}	$\dots$	a_{mn}	b_m
-z	c_1	c_2	$\dots$	c_n	0

- Simplextableau für das Beispiel:

BV / NBV	x_1	x_2	b
s_1	4	8	32
s_2	4	2	20
s_3	0	8	24
$-z$	20	30	0

10.3 Numerische Lösung mittels Simplex-Verfahren V

- Simplex-Algorithmus:

1. Auswahl der Pivotspalte s: Wähle die Spalte als Pivotspalte s, die den größten positiven Koeffizienten in der $-z$-Zeile enthält.

2. Auswahl der Pivotzeile r: Wähle die Zeile, die den Engpaß bestimmt, d.h. der kleinste Quotient
$$q_r = \min_i \left\{ \frac{b_i}{a_{is}} \right\} \geq 0.$$

3. Bestimmung des Pivotelements a_{rs} als das Element im Schnittpunkt von Pivotspalte s und Pivotzeile r. Die bisherige Basisvariable der Pivotzeile wird zur neuen Nichtbasisvariablen in der Pivotspalte und die bisherige Nichtbasisvariable in der Pivotspalte wird zur neuen Basisvariablen in der Pivotzeile.

10.3 Numerische Lösung mittels Simplex-Verfahren VI

- Simplex-Algorithmus:

  4. Berechnung der neuen Elemente des Simplextableaus

     a) Das Pivotelement wird durch seinen Kehrwert ersetzt.

     b) Die Elemente der Pivotzeile r werden durch das Pivotelement dividiert.

     c) Die Elemente der Pivotspalte s werden durch das mit (-1) multiplizierte Pivotelement dividiert.

     d) Die übrigen Elemente werden um das Produkt des Elements der Pivotspalte und des Elements der Pivotzeile, in deren Kreuzungspunkt das Element liegt, dividiert durch das Pivotelement vermindert.

10.3 Numerische Lösung mittels Simplex-Verfahren VII

- Simplex-Algorithmus am obigen Beispiel 1/3

Bestimmung des Pivotelements

BV / NBV	x_1	x_2	b
s_1	4	8	32
s_2	4	2	20
s_3	0	8	24
$-z$	20	30	0

Neues Pivot-Tableau

BV / NBV	x_1	s_3	b
s_1	$4-8\cdot 0/8$	$8/(-8)$	$32-8\cdot 24/8$
s_2	$4-2\cdot 0/8$	$2/(-8)$	$20-2\cdot 24/8$
x_2	$0/8$	$1/8$	$24/8$
$-z$	$20-30\cdot 0/8$	$30/(-8)$	$0-30\cdot 24/8$

10.3 Numerische Lösung mittels Simplex-Verfahren VIII

- Simplex-Algorithmus am obigen Beispiel 2/3

Bestimmung des Pivotelements

BV / NBV	x_1	s_3	b
s_1	4	-1	8
s_2	4	-0.25	14
x_2	0	0.125	3
$-z$	20	-3.75	-90

Neues Pivot-Tableau

BV / NBV	s_1	s_3	b
x_1	$1/4$	$-1/4$	$8/4$
s_2	$4/(-4)$	$-0.25 - 4 \cdot (-1)/4$	$14 - 4 \cdot 8/4$
x_2	$0/(-4)$	$0.125 - 0 \cdot (-1)/4$	$3 - 0 \cdot 8/4$
$-z$	$20/(-4)$	$-3.75 - 20 \cdot (-1)/4$	$-90 - 20 \cdot 8/4$

10.3 Numerische Lösung mittels Simplex-Verfahren IX

- Simplex-Algorithmus am obigen Beispiel 3/3

  Bestimmung des Pivotelements

BV / NBV	s_1	s_3	b
x_1	0.25	-0.25	2
s_2	-1	0.75	6
x_2	0	0.125	3
$-z$	-5	1.25	-130

  Neues Pivot-Tableau

BV / NBV	s_1	s_3	b
x_1	$-1/12$	$-1/3$	4
s_2	$-4/3$	$4/3$	8
x_2	$1/6$	0.125	2
$-z$	-15	$-4/3$	-140