χ^2–Tests

- Grundidee
- χ^2-Anpassungstest
- χ^2-Unabhängigkeitstest
- χ^2-Homogenitätstest

Grundidee

- Ausgangspunkt: Klasseneinteilung der Beobachtungen in k Klassen.
- Annahme: Einfache Zufallsstichprobe $(X_1, \ldots, X_n)$.
- N_i: Anzahl der Stichprobenelemente, die in i-te Klasse fallen für $i = 1, 2, \ldots, k$.

  Beachte: Klassenhäufigkeiten N_i sind Funktion der Stichprobe und damit wieder Zufallsvariablen.
- Nullhypothese: Verteilung der X_i.

  Klassenwahrscheinlichkeiten bei Gültigkeit der Nullhypothese: p_i^0.

Erwartete Klassenhäufigkeiten bei Gültigkeit der Nullhypothese: $E(N_i) = np_i^0$.

- Entscheidungsregel: Nullhypothese umso eher ablehnen, je größer Abstand zwischen Klassenhäufigkeiten und unter Nullhypothese erwarteten Klassenhäufigkeiten.

  Abstandsmaß (χ^2-Statistik):

$$\boxed{\chi^2 = \sum_{i=1}^{k} \frac{(N_i - np_i^0)^2}{np_i^0}}$$

- Asymptotische Verteilung von χ^2 bei Gültigkeit der Nullhypothese:

$$\chi^2 \overset{appr}{\sim} \chi^2(fg)$$

  mit fg Anzahl der Freiheitsgrade, die von der speziellen Testproblematik abhängen.
- Kritischer Bereich: Werte der χ^2-Statistik, die $1-\alpha$-Quantil der χ^2-Verteilung überschreiten.

Übersicht:

- χ^2–Anpassungstest:

  Nullhypothese: Verteilung der Grundgesamtheit folgt bekanntem parametrischen Verteilungsgesetz $F_X(.;\theta)$.

- χ^2–Unabhängigkeitstest:

  Nullhypothese: X und Y stochastisch unabhängig.

- χ^2–Homogenitätstest:

  Nullhypothese: Zwei einfache unverbundene Stichproben $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ und $(Y_1, Y_2, \ldots, Y_m)$ stammen aus derselben Grundgesamtheit.

χ^2–Anpassungstests

- Annahme 1: Verteilung der Grundgesamtheit ist durch die Nullhypothese vollständig spezifiziert (einfache Nullhypothese).

  Beispiel: $H_0 : X \sim \mathcal{N}(1000, 36)$.

- Annahme 2: Verteilung der Grundgesamtheit ist bis auf einige unbekannte Parameter vollständig spezifiziert (zusammengesetzte Nullhypothese).

  Beispiel: $H_0 : X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ mit μ und σ^2 unbekannt.

χ^2–Anpassungstest für eine einfache Nullhypothese (Annahme 1)

- Nullhypothese

$$H_0 : \text{"}X \text{ folgt der parametrischen Verteilung } F_X(x;\theta_0)\text{"}$$

- (Willkürliche) Zerlegung des Trägers $D(X)$ von F_X in k disjunkte Klassen.

  i-te Klasse: $(\tilde{x}_{i-1}, \tilde{x}_i]$.

- N_i: Häufigkeit, mit der Realisationen von X in die i-te-Klasse fallen.

- Unter H_0 (falls f_X Dichte von F_X):

$$p_i^0 = \int_{\tilde{x}_{i-1}}^{\tilde{x}_i} f_X(x)dx$$

  (Klassenwahrscheinlichkeiten unter H_0)

- Unter H_0 zu erwartenden absoluten Klassenhäufigkeiten

$$E(N_i) = np_i^0.$$

- Prüfmaß unter H_0:

$$\boxed{\chi^2 = \sum_{i=1}^{k} \frac{(N_i - np_i^0)^2}{np_i^0} \overset{appr}{\sim} \chi^2(k-1)}$$

- Die Approximation durch eine χ^2-Verteilung ist "gut", wenn gilt:

$$\boxed{np_i^0 \geq 5 \quad \text{für } k \leq 8\,, \qquad np_i^0 \geq 1 \quad \text{für } k > 8}$$

χ^2-Anpassungstest für eine zusammengesetzte Nullhypothese (Annahme 2)

- Nullhypothese

$$H_0 : \text{"}X \text{ folgt der parametrischen Verteilung } F_X(x;\theta)\text{"}$$

θ: unbekannter Parametervektor der Länge r.

- Unter H_0 (falls f_X Dichte von F_X):

$$p_i^0(\theta) = \int_{\tilde{x}_{i-1}}^{\tilde{x}_i} f_X(x;\theta)dx$$

(Klassenwahrscheinlichkeiten unter H_0 als Funktion von θ)

- Unter H_0 zu erwartende absolute Klassenhäufigkeiten

$$E(N_i) = np_i^0(\theta).$$

- Schätzung der Klassenwahrscheinlichkeiten und der erwarteten Häufigkeiten durch konsistente Schätzung $\hat{\theta}$ von θ. D.h.

$$\hat{p}_i = p_i(\hat{\theta}).$$

- Einsetzen des Schätzwertes $\hat{\theta}$ in Nullhypothese führt zur „einfachen Nullhypothese":

$$H_0 : \text{"}X \text{ folgt der parametrischen Verteilung } F_X(x;\hat{\theta})\text{"}$$

- Prüfmaß unter H_0:

$$\boxed{\chi^2 = \sum_{i=1}^{k} \frac{(N_i - n\hat{p}_i^0)^2}{n\hat{p}_i^0} \overset{appr}{\sim} \chi^2(k - r - 1)}$$

Beispiel: Einfache Nullhypothese

- X: „Tägliche Anzahl von Unfällen auf dem Autobahnabschnitt Nürnberg-Heilbronn".
- Nullhypothese: $H_0 : X \sim Poi(\lambda = 1.5)$.
- Stichprobenbefund: Anzahl x der Unfälle an $n = 120$ zufällig ausgewählten Tagen:

Klassen	$x=0$	$x=1$	$x=2$	$x=3$	$x=4$	$x \geq 5$
n_i	41	50	19	8	2	0

- Unter H_0 zu erwartende Häufigkeiten:

$$\begin{array}{lclcl} p_1^0 & = & P(X=0|H_0) = 0.2231 & \Rightarrow & E(N_1) = np_1^0 = 26.772 \\ p_2^0 & = & P(X=1|H_0) = 0.3347 & \Rightarrow & E(N_2) = np_2^0 = 40.164 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ p_6^0 & = & P(X \geq 5|H_0) = 0.0185 & \Rightarrow & E(N_6) = np_6^0 = 2.220 \end{array}$$

- Problem: Zu erwartetende Häufigkeiten für fünfte und sechste Klasse zu klein für eine gute Approximation.

  Lösung: Zusammenfassung.

- Summanden der χ^2-Statistik:

i	X_i	n_i	np_i^0	$n_i - np_i^0$	$\frac{(n_i-np_i^0)^2}{np_i^0}$
1	$x=0$	41	26.772	14.228	7.561
2	$x=1$	50	40.164	9.836	2.409
3	$x=2$	19	30.120	−11.120	4.105
4	$x=3$	8	15.060	−7.060	3.310
5	$x=4$	2	5.652	-5.872	4.380
6	$x \geq 5$	0	2.220		
	Σ	120	120	0	21.765

Empirischer Wert der Prüfgröße:

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{5} (n_i - np_i^0)^2/(np_i^0) = 21.765.$$

- Kritischer Wert: 99%-Quantil der χ^2–Verteilung mit $5 - 1 = 4$ Freiheitsgraden: $\chi^2_{0.99;4} = 13.28$.
- Testentscheidung: Nullhypothese ist mit einer Irrtumswahrscheinlichkeit von 1% zu verwerfen d.h. die Anzahl der Unfälle ist nicht Poisson–verteilt mit $\lambda = 1.5$.

Beispiel: Zusammengesetzte Nullhypothese

- X: "Tägliche Anzahl von Unfällen auf dem Autobahnabschnitt Nürnberg-Heilbronn".
- Nullhypothese: $H_0 : X \sim Poi(\lambda)$, λ unbekannt.
- ML-Schätzer für λ: $\hat{\lambda}_{ML} = \overline{X}_n$.
  Schätzwert: $\overline{x}_{120} = 1.0$.

- Unter H_0 zu erwartende Häufigkeiten:

$$\begin{array}{lclcl}
\hat{p}_1^0 & = & P_{\lambda=\hat{\lambda}_{ML}}(X=0|H_0) = 0.3679 & \Rightarrow & n\hat{p}_1^0 = 44.148 \\
\hat{p}_2^0 & = & P_{\lambda=\hat{\lambda}_{ML}}(X=1|H_0) = 0.3679 & \Rightarrow & n\hat{p}_2^0 = 44.148 \\
\vdots & & \vdots & & \vdots \\
\hat{p}_6^0 & = & P_{\lambda=\hat{\lambda}_{ML}}(X \geq 5|H_0) = 0.0037 & \Rightarrow & n\hat{p}_6^0 = 0.444\ .
\end{array}$$

- Zusammenfassung der vierten, fünften und sechsten Klasse.

- Summanden der χ^2-Statistik:

i	X_i	n_i	$n\hat{p}_i^0$	$n_i - n\hat{p}_i^0$	$\frac{(n_i-n\hat{p}_i^0)^2}{n\hat{p}_i^0}$
1	$x=0$	41	44.148	-3.148	0.224
2	$x=1$	50	44.148	5.852	0.776
3	$x=2$	19	22.068	-3.068	0.427
4	$x=3$	8	7.356		
5	$x=4$	2	1.836	0.364	0.014
6	$x \geq 5$	0	0.444		
	Σ	120	120	0	1.441

- Empirischer Wert der Teststatistik:

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{4} (n_i - n\hat{p}_i^0)^2/(n\hat{p}_i^0) = 1.441$$

- Kritischer Wert: 99%-Quantil der χ^2–Verteilung mit $4-2=2$ Freiheitsgraden: $\chi^2_{0.99;2} = 9.21$.
- Testentscheidung: Nullhypothese kann mit einer Irrtumswahrscheinlichkeit von 1% nicht verworfen werden, d.h. man kann mit der Arbeitshypothese, dass die Anzahl der Unfälle Poisson–verteilt ist, weiterarbeiten.

Beispiel: Zusammengesetzte Nullhypothese

- X: Punktzahl in der Statistik-Klausur.
- Nullhypothese: $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, μ, σ^2 unbekannt.
- Daten: $n = 1116$ Studierenden (stat[,1]).
- Schätzwerte für μ und σ^2 aufgrund der 1116 Einzeldaten:

$$\hat{\mu} = 20.8212, \quad \hat{\sigma}^2 = 45.6075.$$

- Arbeitstabelle:

Klasse i	n_i	$\hat{p}_i^0$	$n\hat{p}_i^0$	$\frac{(n_i - n\hat{p}_i^0)^2}{n\hat{p}_i^0}$
$-\infty$ bis 10	62	0.0547	61.0452	0.0149
mehr als 10 bis 15	143	0.1399	156.1284	1.1039
mehr als 15 bis 20	336	0.2571	286.9236	8.3942
mehr als 20 bis 25	311	0.2802	312.7032	0.0093
mehr als 25 bis 30	150	0.1810	201.9960	13.3843
mehr als 30 bis ∞	114	0.0872	97.3152	2.8606
$\sum$	1116	1	1116	25.7672

- Exemplarische Berechnung von Klassenwahrscheinlichkeiten unter H_0:

$$\begin{aligned}
\hat{p}_1^0 &= \Phi\left(\frac{10 - 20.8212}{\sqrt{45.6075}}\right) = \Phi(-1.6012) = 0.0547 \\
\hat{p}_2^0 &= \Phi\left(\frac{15 - 20.8212}{\sqrt{45.6075}}\right) - \Phi\left(\frac{10 - 20.8212}{\sqrt{45.6075}}\right) \\
&= \Phi(-0.8614) - \Phi(-1.6012) = 0.1399 \\
\hat{p}_6^0 &= 1 - \Phi\left(\frac{30 - 20.8212}{\sqrt{45.6075}}\right) = 1 - \Phi(1.3582) = 0.0872.
\end{aligned}$$

- Voraussetzungen, dass χ^2 hinreichend gut χ^2-verteilt ist, sind erfüllt ($k \leq 8$ und $np_i^0 \geq 5$).
- Kritischer Wert für $\alpha = 0.05$: $\chi^2_{0.95;6-2-1} = 7.8147$.
- Testentscheidung: Da der empirische Wert $\chi^2 = 25.7672$ größer ist als das 95%-Quantil der χ^2-Verteilung mit 3 Freiheitsgraden, kann die Nullhypothese mit einer Irrtumswahrscheilichkeit von 5% abgelehnt werden. D.h. die Punktzahl in der Statistik-Klausur ist nicht normalverteilt.
- Aufgrund der Summanden von χ^2 sieht man, dass in der dritten (fünften) Klasse deutlich mehr (deutlich weniger) Beobachtungen liegen, als unter der Normalverteilung zu erwarten wären.

Umsetzung in R mittels chisq.test

```
> x=seq(0,3,1)          # Erste 4 Klassen
> p=dpois(x,1.5)        # Wahrscheinlichkeiten der ersten vier
                        # Klassen
> p5=1-ppois(3,1.5)     # Wahrscheinlichkeit der fuenften Klasse
> p=c(p,p5)
> n=c(41,50,19,8,2)   # Haeufigkeitsvektor

> chisq.test(n,y=NULL,correct=FALSE,p)
                        # Chi-Quadrat-Anpassungstest
                        # "correct=FALSE" bedeutet "keine
                        # Stetigkeitskorrektur".
```


Output:

```
        Chi-squared test for given probabilities

data:  n  X-squared = 21.7682, df = 4, p-value = 0.0002229
```


χ^2–Unabhängigkeitstests

- Ausgangspunkt: Zwei verbundene Zufallsvariablen X bzw. Y deren Träger in k bzw. l Kassen zerlegt wurde.

  Klassen:

$$D(X)_1, \ldots, D(X)_k \text{ und } D(Y)_1, \ldots, D(Y)_l$$

- Klassenwahrscheinlichkeiten:

$$p_{ij}^0 = P(X \in D(X_i) \text{ und } Y \in D(Y_j))$$

- Wahrscheinlickeitstabelle:

$i\backslash j$	1	2	...	l	Σ
1	p_{11}	p_{12}	...	p_{1l}	$p_{1.}$
2	p_{21}	p_{22}	...	p_{2l}	$p_{2.}$
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
k	p_{k1}	p_{k2}	...	p_{kl}	$p_{k.}$
Σ	$p_{.1}$	$p_{.2}$	...	$p_{.l}$	1

- Ausgangspunkt: Einfache verbundene Stichprobe

$$(X_1, Y_1), \ldots, (X_n, Y_n)$$

- N_{ij}: Gemeinsame Häufigkeit, mit der Elemente der Stichprobe in die i-te Klasse von X und die j-te Klasse von Y fallen für $i = 1, 2, \ldots, k$ und $j = 1, 2, \ldots, l$.

- Kontingenztabelle:

$i \backslash j$	1	2	...	l	Σ
1	N_{11}	N_{12}	...	N_{1l}	$N_{1\cdot}$
2	N_{21}	N_{22}	...	N_{2l}	$N_{2\cdot}$
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
k	N_{k1}	N_{k2}	...	N_{kl}	$N_{k\cdot}$
Σ	$N_{\cdot 1}$	$N_{\cdot 2}$	...	$N_{\cdot l}$	n

- Nullhypothese:

$H_0:$ „Zufallsvariablen X und Y sind stochastisch unabhängig."

- Unter H_0 zu erwartende Häufigkeiten:

$$np_{ij}^0 = np_{i\cdot} \cdot p_{\cdot j}$$

- Problem: Nullhypothese zusammengesetzt, da $k-1$ Randwahrscheinlichkeiten $p_{i\cdot}$ und $l-1$ Randwahrscheinlichkeiten $p_{\cdot j}$ nicht festlegt sind.

- Lösung: Schätzung der Randwahrscheinlichkeiten mittels relativer Randhäufigkeiten:

$$\hat{p}_{i\cdot} = \frac{N_{i\cdot}}{n}, \quad \hat{p}_{\cdot j} = \frac{N_{\cdot j}}{n} \quad \Longrightarrow \quad \hat{p}_{ij}^0 = n\frac{N_{i\cdot}}{n}\frac{N_{\cdot j}}{n} = \frac{N_{i\cdot}N_{\cdot j}}{n}$$

für $i = 1, 2, \ldots, k-1$ und $j = 1, 2, \ldots, l-1$.

- Prüfmaß unter H_0:

$$\boxed{\chi^2 = \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{l} \frac{\left(N_{ij} - \frac{N_{i\cdot}N_{\cdot j}}{n}\right)^2}{\frac{N_{i\cdot}N_{\cdot j}}{n}} \overset{appr}{\sim} \chi^2((k-1)(l-1))}$$

- Approximation ist hinreichend gut, wenn gilt:

$$\boxed{n_{ij} \geq 10 \text{ und } n_{i\cdot}n_{\cdot j}/n \geq 5, \quad i = 1, \ldots, k, \; j = 1, \ldots, l}$$

Beispiel

- Einschätzung der Qualität des Freizeitangebots in Nürnberg in Abhängigkeit vom Geschlecht.
- Zufällige Auswahl von $n = 400$ Studierenden.
- Merkmal B „Einschätzung des Freizeitangebots in Nürnberg“ mit Kategorien B_1 „eher gut“, B_2 „mittel“, B_3 „eher schlecht“

  Merkmal A Geschlecht mit Kategorien A_1 „männlich“, A_2 „weiblich“.

- N_{ij}: Zufallsvariable, die angibt, wie viele der 400 Befragten bez. des Geschlechts die $i-te$ und bez. des Freizeitangebotes die j-te Kategorie nennen.

  p_{ij}: Wahrscheinlichkeit, mit der Studierender in Grundgesamtheit i-te Kategorie des Geschlechts und j-te Kategorie des Freizeitangebotes nennt.

  $p_{i\cdot}$: Wahrscheinlichkeit, mit der Studierender in Grundgesamtheit i-te Kategorie des Geschlechts nennt.

  $p_{\cdot j}$: Wahrscheinlichkeit, mit der Studierender in Grundgesamtheit die j-te Kategorie des Freizeitangebotes nennt.

- Nullhypothese:

$$H_0: \; p_{ij} = p_{i\cdot}p_{\cdot j} \;\; i = 1,2, \; j = 1,2,3$$

- Befragungsergebnis:

	B_1	B_2	B_3	$\sum_i$
A_1	60	100	104	264
A_2	40	50	46	136
$\sum_j$	100	150	150	400

- Unter H_0 zu erwartende Häufigkeiten ($n\hat{p}_{i\cdot}\hat{p}_{\cdot j} = n_{i\cdot}n_{\cdot j}/n$):

	B_1	B_2	B_3	$\sum_i$
A_1	66	99	99	264
A_2	34	51	51	136
$\sum_j$	100	150	150	400

- Approximationsanforderungen sind erfüllt.
- Empirischer Wert der Teststatistik:

$$\chi^2 = \frac{(60-66)^2}{66} + \frac{(100-99)^2}{99} + \ldots + \frac{(46-51)^2}{51} = 2.38$$

- Kritischer Wert (für $\alpha = 0.05$): $\chi^2_{0.95;2} = 5.99$.

- Testentscheidung: Nullhypothese kann bei einer Wahrscheinlichkeit für den Fehler 1. Art von höchstens 5% nicht verworfen werden.

- Marginales Signifikanzniveau ($=p$-Wert): $p = 0.3042$.

χ^2-Unabhängigkeitstest in R

```
> n=t(matrix(c(60,100,104,40,50,46),3,2))
                        # Kontingenztabelle mit 2 Zeilen
                        # und 3 Spalten bei zeilenweiser
                        # Eingabe
> n
     [,1] [,2] [,3]
[1,]   60  100  104 [2,]   40   50   46
> n1p=n%*%c(1,1,1)       # Zeilensummen per Matrizenmultiplikation
> np1=t(n)%*%c(1,1)      # Spaltensummen per Matrizenmulitplkation
> nn=sum(n)              # Summe aller Haeufigkeiten
> p=(n1p/nn)%*%t(np1/nn) # Wahrsch.keiten bei Unabhaengigkeit
> p*nn                   # Erwartete Haeufigkeiten
     [,1] [,2] [,3]
[1,]   66   99   99 [2,]   34   51   51
> chisq.test(n,correct=FALSE,p)
                         # Chi-Quadrat-Unabhaengigkeitstest
```


Output:

```
        Pearson's Chi-squared test

data:  n X-squared = 2.3767, df = 2, p-value = 0.3047
```


χ^2–Homogenitätstests

- Ausgangspunkt: Zwei Zufallsvariablen X bzw. Y mit identischem Träger $D(X) = D(Y)$, der in k Klassen zerlegt wurde.

- Zwei einfache unverbundene Stichproben $(X_1, X_2, \ldots X_{n_{(1)}})$ und $(Y_1, Y_2, \ldots, Y_{n_{(2)}})$.

- $N_{(1)i}$ bzw. $N_{(2)i}$: Anzahl der Stichprobenelemente X_j bzw. Y_j die in i-te Klasse fallen.

- $p_{(1)i}$ bzw. $p_{(2)i}$: Wahrscheinlichkeit, dass X bzw. Y in i-te Klasse fallen.

- Nullhypothese (Verteilung von X und Y sind identisch):

$$H_0: \; p_{(1)i} = p_{(2)i} = p_i^0 \quad , \qquad i = 1, 2, \ldots, k.$$

- Problem: p_i^0, $i = 1, 2, \ldots, k-1$ sind unbekannt $\Longrightarrow$ Nullhypothese zusammengesetzt.

- Unter H_0 stamnmen beide Stichproben aus derselben Grundgesamtheit (=Homogenität der Stichproben).

  p_i^0 kann als relative Häufigkeit

$$\hat{p}_i^0 = \frac{N_{(1)i} + N_{(2)i}}{n_{(1)} + n_{(2)}}$$

  geschätzt werden.

- Unter H_0 zu erwartende Häufigkeiten:

$$E[N_{(1)i}] = n_{(1)} \frac{N_{(1)i} + N_{(2)i}}{n_{(1)} + n_{(2)}} \text{ bzw. } E[N_{(2)i}] = n_{(2)} \frac{N_{(1)i} + N_{(2)i}}{n_{(1)} + n_{(2)}}.$$

- Prüfgröße unter H_0:

$$\boxed{\sum_{i=1}^{k} \left(\frac{(N_{(1)i} - n_{(1)}\hat{p}_i^0)^2}{n_{(1)}\hat{p}_i^0} + \frac{(N_{(2)i} - n_{(2)}\hat{p}_i^0)^2}{n_{(2)}\hat{p}_i^0} \right) \overset{appr}{\sim} \chi^2(k-1)}$$

- Approximation hinreichend gut, wenn gilt:

$$\boxed{n_{(g)i} \geq 10 \quad \text{und} \quad n_{(g)i} \frac{n_{(1)i} + n_{(2)i}}{n_{(1)} + n_{(2)}} \geq 5 \,,}$$

  $i = 1, \ldots, k$, $g = 1, 2$, wobei $n_{(g)i}$ Realisation von $N_{(g)i}$.

Beispiel: Schira (2003), S. 502f.

- Vier Wochen vor der Bundestagswahl 2002 ergab die Sonntagsfrage in Umfragen der Forschungsgruppe Wahlen (= FG Wahlen) und des Instituts für Demoskopie Allensbach (IfD) folgende Ergebnisse in Prozent:

Partei	FG Wahlen ($g = 1$)	IfD ($g = 2$)
CDU/CSU	39	39.7
SPD	38	31.9
FDP	9	12.8
Grüne	7	6.7
PDS	4	5.6
Sonstige	3	3.3
$\sum$	100	100
Stichprobenumfang $n_{(g)}$	1500	1520

- Frage: Kann es sein, dass diese beiden Stichproben aus derselben Grundgesamtheit stammen?

- Arbeitstabelle:

	i	$n_{(g)i}$	$\hat{p}_i^0$	$n_{(g)}\hat{p}_i^0$	$\frac{(n_{(g)i}-n_{(g)}\hat{p}_i^0)^2}{n_{(g)i}\hat{p}_i^0}$
FG Wahlen		$g=1$			
CDU/CSU	1	585	0.3934	590.10	0.0441
SPD	2	570	0.3493	523.95	4.0473
FDP	3	135	0.1093	163.95	5.1119
Grüne	4	105	0.0685	102.75	0.0493
PDS	5	60	0.0480	72.00	2.0000
Sonstige	6	45	0.0315	47.25	0.1071
IfD		$g=2$			
CDU/CSU	1	603	0.3934	597.968	0.0423
SPD	2	485	0.3493	530.936	3.9743
FDP	3	195	0.1093	166.136	5.0147
Grüne	4	102	0.0685	104.120	0.0432
PDS	5	85	0.0480	72.960	1.9869
Sonstige	6	50	0.0315	47.880	0.0939
χ^2					22.515

- Irrtumswahrschenlichkeit 5%: Kritischer Wert $\chi_{0.95;5} = 11.0705$.

- Wegen $\chi^2 = 22.515 > \chi_{0.95;5} = 11.0705$ kann H_0 mit einer Irrtumswahrscheinlichkeit von 5% abgelehnt werden.

- Marginales Signifikanzniveau (p-Wert): $\mathsf{P}(\chi^2 > 22.515|H_0) = 0.000418$.