



- 
4. Es wird vermutet, dass die Anzahl der Buchpublikationen ( $X$ ) von der Anzahl der Departments ( $Y$ ) abhängt. Berechnen Sie den Korrelationskoeffizienten, wenn bekannt ist, dass  $\sum_{i=1}^8 x_i = 56$ ,  $\sum_{i=1}^8 y_i = 160$ ,  $s_Y^2 = \frac{1}{8} \sum_{i=1}^8 (y_i - \bar{y})^2 = 15.75$  und  $\frac{1}{8} \sum_{i=1}^8 x_i y_i = 148$ .

Eine Publikation soll auf Plagiate überprüft werden. Dazu sollen zufällig  $n$  Seiten ausgewählt und auf Plagiate durchsucht werden. Die Anzahl der Plagiate pro Seite ( $Z$ ) sei normalverteilt mit unbekanntem Mittelwert  $\mu$  und Varianz  $\sigma^2 = 0.04$ .

5. Bestimmen Sie den Stichprobenumfang  $n$  so, dass die mittlere Anzahl von Plagiaten in der Stichprobe mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens 95% um weniger als 0.1 von  $\mu$  abweicht.



---

*Schmierpapier*





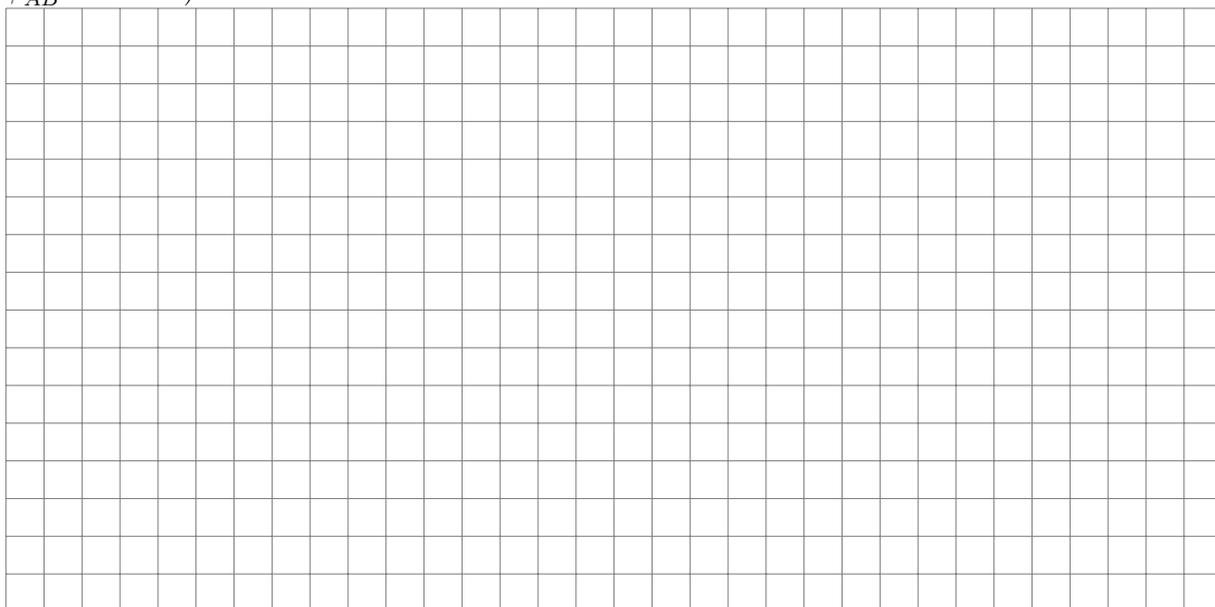




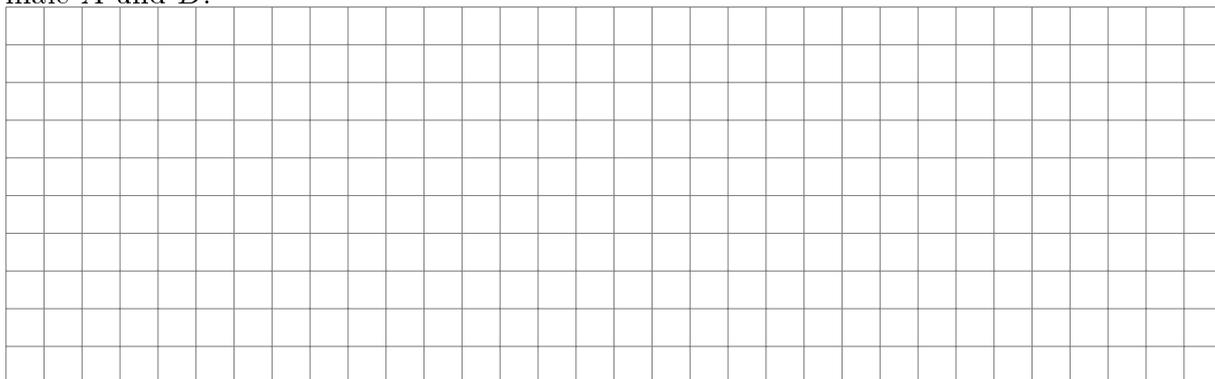
6. Berechnen Sie die mittlere quadratische Kontingenz  $\phi_{AB}^2$ . Folgende Zwischenergebnisse können verwendet werden:

$$\boxed{\begin{array}{ccc} \frac{(n_{11}-n_{11}^*)^2}{n_{11}^*} = 0.0032 & \frac{(n_{12}-n_{12}^*)^2}{n_{12}^*} = 0.2949 & \frac{(n_{13}-n_{13}^*)^2}{n_{13}^*} = 0.1091 \\ & \frac{(n_{22}-n_{22}^*)^2}{n_{22}^*} = 2.4810 & \frac{(n_{23}-n_{23}^*)^2}{n_{23}^*} = 0.9175 \end{array}}$$

(**Hinweis:** Wenn Sie diese Aufgabe nicht lösen können, verwenden Sie im Folgenden  $\phi_{AB}^2 = 0.005$ .)



7. Berechnen und interpretieren Sie das Cramérsche Kontingenzmaß  $V$  für die Merkmale  $A$  und  $B$ .





*Schmierpapier*



---

*Schmierpapier*



## Aufgabe 3

Sie untersuchen im Auftrag eines Tierschutzverbandes, wieviele Hühner aus Massentierhaltung mit Antibiotika behandelt und anschließend in Supermärkten verkauft werden. Dazu führen Sie eine Zufallsstichprobe in zufällig ausgewählten Supermärkten durch. Die Zufallsvariable  $X$ : "Ein zufällig ausgewähltes Huhn wurde mit Antibiotika behandelt." sei bernoulliverteilt, d.h.  $X$  besitzt die Wahrscheinlichkeitsmassenfunktion

$$f_X(x) = p^x(1-p)^{1-x}$$

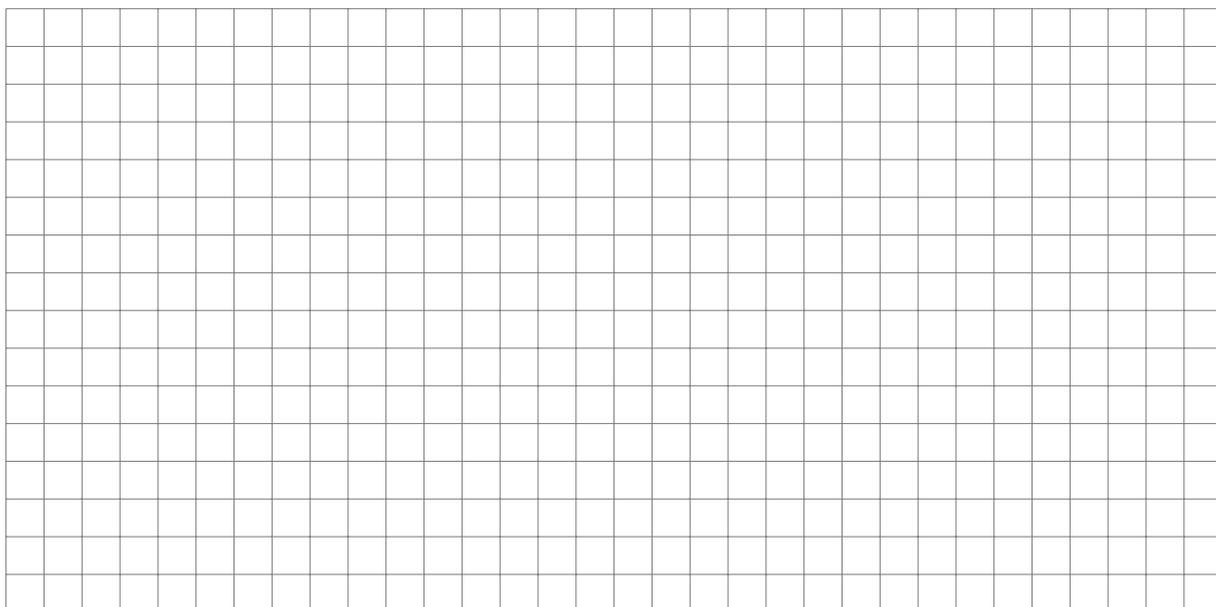
mit unbekanntem Parameter  $p \in [0, 1]$ . Dabei sei  $X = 1$ , falls das Huhn mit Antibiotika behandelt wurde und  $X = 0$  falls nicht.

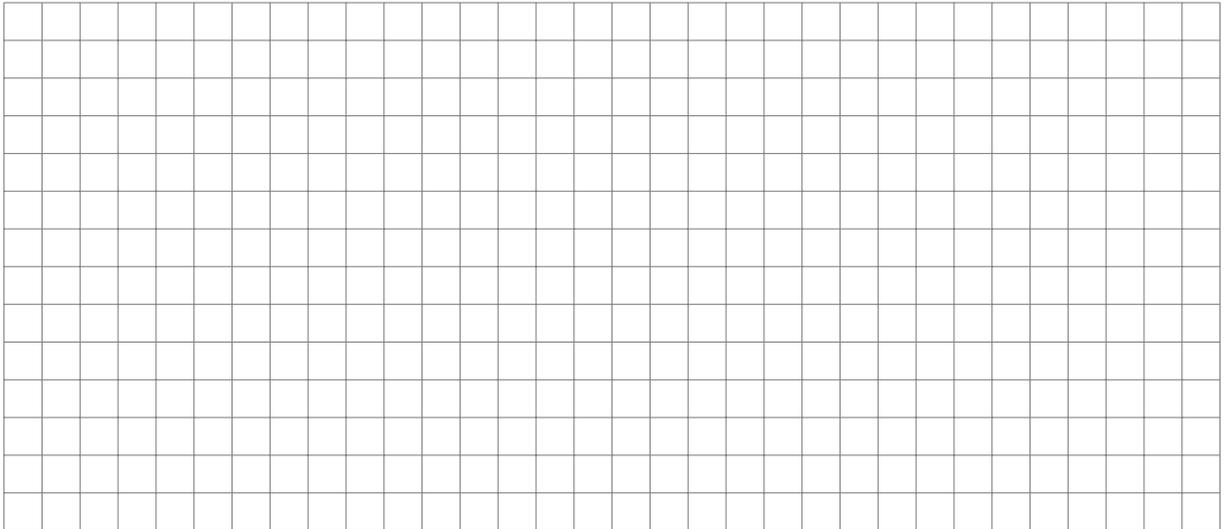
1. Geben Sie an, ob die folgenden Aussagen "wahr" oder "falsch" sind (ohne Begründung). Jede **richtige** Antwort wird mit **0.5**, jede **falsche** mit **-0.5** und keine Antwort wird mit **0** Punkten bewertet. **Insgesamt** können in dieser Teilaufgabe **mindestens 0** und **höchstens 2** Punkte erreicht werden.

- (a) \_\_\_\_\_ Die Punktwahrscheinlichkeit bei einer Bernoulliverteilung ist immer gleich 0.
- (b) \_\_\_\_\_ Die Dichtefunktion bei stetigen Verteilungsmodellen kann Werte größer 1 annehmen.
- (c) \_\_\_\_\_ Sind die Ereignisse  $A$  und  $B$  unabhängig, so gilt stets:  $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$ .
- (d) \_\_\_\_\_ Sind die Ereignisse  $A$  und  $B$  unabhängig, so gilt stets:  $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$ .

2. Zeigen Sie, dass die Loglikelihoodfunktion  $\ln L(p)$  einer Bernoulliverteilung folgende Gestalt hat:

$$\ln L(p) = \sum_{i=1}^n (x_i \ln(p) + (1 - x_i) \ln(1 - p)).$$





3. Zeigen Sie, dass der ML-Schätzer  $\hat{p}_{ML}$  für  $p$  durch  $\hat{p}_{ML} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$  gegeben ist.







*Schmierpapier*



---

*Schmierpapier*



## Aufgabe 4

Der R-Data Frame `NW` enthält die folgenden Merkmale von 50 zufällig ausgewählten sozialen Netzwerken, die derzeit im Internet vertreten sind.

Merkmal <i>A</i> :	Anzahl registrierter Nutzer in Mio.	Spalte <code>Nutzer</code>
Merkmal <i>B</i> :	durchschnittl. tägl. Nutzungsdauer in Min.	Spalte <code>Dauer</code>
Merkmal <i>C</i> :	Thema	Spalte <code>Thema</code>
Merkmal <i>D</i> :	Verbreitung	Spalte <code>Verbreitung</code>

Beim Merkmal *D* handelt es sich um ein qualitatives Merkmal mit den Ausprägungen  $d_1$ : national und  $d_2$ : international.

Betrachten Sie nun den zum Data Frame `NW` gehörenden R-Output.

```
> table(NW$Verbreitung,NW$Thema)

                Business Freizeit Spezial
international      13         12         7
national           8         10         0

> cor(NW$Nutzer,NW$Dauer)
[1] 0.8411377

> max(NW$Nutzer)-min(NW$Nutzer)
[1] 132.96

> D_i=NW[NW$Verbreitung=="international","Dauer"]
> D_n=NW[NW$Verbreitung=="national","Dauer"]
> quantile(D_n,1,type=1)
100%
19.5

> max(D_i)
[1] 48

> N_i=NW[NW$Verbreitung=="international","Nutzer"]
> N_n=NW[NW$Verbreitung=="national","Nutzer"]
> mean(N_i)
[1] 17.44369

> mean(N_n)
[1] 6.078453

> quantile(N_i,0.75,type=1)
75%
20
```





---

## Aufgabe 1

1.

$i$	$x_i$	$n_i$	$f_i$	$F_i$
1	3	1	0.125	0.125
2	4	2	0.25	0.375
3	7	1	0.125	0.5
4	8	2	0.25	0.75
5	10	1	0.125	0.875
6	12	1	0.125	1

Modi: 4 und 8,      Median:  $x_{(0.5)} = 7$ ,      Unteres Quartil:  $x_{(0.25)} = 4$ .

2. Spannweite:  $12 - 3 = 9$

3.  $F(13) = 1$

Alle betrachtete Universitäten haben im Jahr 2011 maximal 13 Buchpublikationen.

4.  $s_{XY} = \overline{xy} - \bar{x} \cdot \bar{y} = 148 - \frac{56}{8} \cdot \frac{160}{8} = 8$

$$s_X^2 = \frac{1}{8} \sum_{i=1}^8 (x_i - \bar{x})^2 = \frac{1}{8}(1 + 9 + 1 + 9 + 16 + 25 + 9) = 8.75$$

$$r_{XY} = \frac{s_{XY}}{s_X s_Y} = \frac{8}{\sqrt{8.75} \sqrt{15.75}} = 0.6815$$

oder

$$s_X^2 = \frac{1}{8-1} \sum_{i=1}^8 (x_i - \bar{x}_8)^2 = \frac{1}{7}(1 + 9 + 1 + 9 + 16 + 25 + 9) = 10$$

$$s_Y^2 = 15.75 \cdot \frac{8}{7} = 18$$

$$r_{XY} = \frac{s_{XY}}{s_X s_Y} = \frac{8}{\sqrt{10} \sqrt{18}} = 0.5963$$

5.  $P(|\overline{Z}_n - \mu| < 0.1) = 0.95$

$$P(-0.1 < \overline{Z}_n - \mu < 0.1) = 0.95$$

$$= P\left(\frac{-0.1}{\sigma/\sqrt{n}} < \frac{\overline{Z}_n - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} < \frac{0.1}{\sigma/\sqrt{n}}\right) = \Phi\left(\frac{0.1}{\sigma/\sqrt{n}}\right) - \Phi\left(\frac{-0.1}{\sigma/\sqrt{n}}\right) = 2\Phi\left(\frac{0.1}{\sigma/\sqrt{n}}\right) - 1 = 0.95$$

$$\frac{0.1}{0.2/\sqrt{n}} = 1.96 \quad \Rightarrow \sqrt{n} = 3.92 \quad \Rightarrow n = 15.3664 \quad \Rightarrow n \geq 16$$

6. Methode der Momente. Das erste Potenzmoment der Stichprobe (Stichprobenmittel) wird dem Erwartungswert der Grundgesamtheit gleichgesetzt.

$$\hat{\mu} = \overline{Z}_{20} = 2.2$$

7. W, W, W, F

## Aufgabe 2

1. Modus.
2. Anteil der solventen Unternehmen innerhalb des verarbeitenden Gewerbes: 89.6774%  
Anteil der solventen Unternehmen innerhalb der beobachteten Unternehmen: 89.375%  
Nein.
3.  $f_{\cdot 1} = 0.3875$ ,  $f_{\cdot 2} = 0.205$  und  $f_{\cdot 3} = 0.4075$
4.  $H_A^* = \frac{-\sum_{i=1}^3 f_{\cdot i} \log_2 f_{\cdot i}}{\log_2 3} = 0.9631$   
Die Verteilung von Merkmal  $A$  hat eine hohe Streuung.
5.  $n_{22}^* = \frac{85 \cdot 164}{800} = 17.425$   
 $n_{23}^* = 85 - 32.9375 - 17.425 = 34.6375$   
 $n_{12}^* = 164 - 17.425 = 146.575$   
 $n_{13}^* = 326 - 34.6375 = 291.3625$
6.  $\frac{(n_{21} - n_{21}^*)^2}{n_{21}^*} = 0.0267$   
 $\phi_{AB}^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^3 \frac{(n_{ij} - n_{ij}^*)^2}{n_{ij}^*} = 0.0048$
7.  $V = \sqrt{\frac{\phi_{AB}^2}{\min\{3-1, 2-1\}}} = 0.0693$ . Der Grad der Abhängigkeit der Merkmale  $A$  und  $B$  ist sehr gering.
8.  $800 \cdot 0.0048 = 3.84 < 4.61 = q_{\chi^2(2)}^{0.9}$   
Nullhypothese kann auf 10% Signifikanzniveau nicht abgelehnt werden.
9. W, F, W, F

---

## Aufgabe 3

1. F, W, F, W

2. Bei dieser Aufgabe handelt es sich um Stichproben aus bernoulliverteilten Grundgesamtheiten, d.h.  $X \sim Ber(p)$  wobei  $f_X(x) = p^x(1-p)^{1-x}$  und  $x \in \{0, 1\}$ . Likelihoodfunktion aufstellen:

$$\begin{aligned} L(p) &= \prod_{i=1}^n p_i^x (1-p)^{1-x_i} \\ &= p^{\sum_{i=1}^n x_i} (1-p)^{\sum_{i=1}^n 1-x_i}. \end{aligned}$$

Übergang zur Loglikelihoodfunktion:

$$\begin{aligned} LL(p) &= \ln L(p) = \ln \left( p^{\sum_{i=1}^n x_i} (1-p)^{\sum_{i=1}^n 1-x_i} \right) \\ &= \sum_{i=1}^n x_i \ln(p) + \left( \sum_{i=1}^n 1-x_i \right) \ln(1-p). \end{aligned}$$

3. Zur Bestimmung des ML-Schätzer sind 3 Schritte nötig:

- Ableiten der Loglikelihood nach  $p$ .
- Ableitung gleich Null setzen.
- Nach  $p$  auflösen.

Also:

$$\frac{\partial LL(p)}{\partial p} = \sum_{i=1}^n x_i \frac{1}{p} + \left( \sum_{i=1}^n 1-x_i \right) \frac{1}{1-p} (-1).$$

Ableitung gleich 0 setzen und nach  $p$  auflösen:

$$\begin{aligned} \frac{\partial LL(p)}{\partial p} &\stackrel{!}{=} 0 \\ \sum_{i=1}^n x_i \frac{1}{p} - \left( \sum_{i=1}^n 1-x_i \right) \frac{1}{1-p} &\stackrel{!}{=} 0 \\ \sum_{i=1}^n x_i \frac{1}{p} &= \left( n - \sum_{i=1}^n x_i \right) \frac{1}{1-p} \\ (1-p) \sum_{i=1}^n x_i &= \left( n - \sum_{i=1}^n x_i \right) p \\ \implies \hat{p}_{ML} &= 1/n \sum_{i=1}^n x_i. \end{aligned}$$

4.  $P(T \leq 5) = F_{Binom(n=20,p=0.2)}(5) = 0.8042$ .

5. Der Ansatz für den kritischen Bereich und gegebener Prüfgröße  $T$  lautet:

$$P(H_0 \text{ ablehnen} | H_0 \text{ gilt}) = P(T > k^* | p = 0.2) = \alpha = 0.0321.$$

Also insgesamt:

$$\begin{aligned} P(T > k^* | p = 0.2) &= 1 - P(T \leq k^* | p = 0.2) = 0.0321 \\ \iff 1 - F_{Binom(n=20,p=0.2)}(k^*) &= 0.0321 \\ \iff F_{Binom(n=20,p=0.2)}(k^*) &= 0.9679 \end{aligned}$$

Tabelle Binomialverteilung für  $p = 0.2$ ,  $n = 20$  nachschauen:  $k^* = 7$ .

6. Da  $T > k^*$ , die Prüfgröße somit im kritischen Bereich liegt, lehne  $H_0$  auf dem 3.21%-Niveau ab.

7.  $P(T \geq 10 | p = 0.2) = 1 - P(T \leq 9 | p = 0.2) = 1 - F_{Binom(n=20,p=0.2)}(9) = 1 - 0.9974 = 0.0026$ .

8.

$$\begin{aligned} \beta &= P(H_0 \text{ nicht ablehnen} | H_1 \text{ ist richtig}) = P(T \leq 7 | p = 0.6) \\ &= 1 - F_{Binom(n=20,p=0.4)}(20 - 7 - 1) \text{ siehe Hinweis!} \\ &= 1 - F_{Binom(n=20,p=0.4)}(12) = 1 - 0.9790 = 0.0210. \end{aligned}$$

---

## Aufgabe 4

1. Business, Freizeit, Spezial
2. (a) `barplot(table(NW$Thema)/length(NW$Thema))`  
(b) `is.numeric(NW$Dauer)` oder `str(NW)`, `class(NW$Dauer)`
3. W, W, F, W
4. (a) 6.078453  
(b) 75
5. 

```
Bin_plot=function(n,pr){  
  x=seq(0,n,1)  
  fx= dbinom(x,size=n,prob=pr)  
  plot(x,fx,type="p") }
```
6. `t.test(D_i,D_n,mu=2,paired=FALSE,var.equal=TRUE,alternative="greater",  
 conf.level=0.99)`
7.  $H_0$  ist abzulehnen, da p-Wert des Tests mit 0.06481617 kleiner ist als vorgegebene Irrtumswahrscheinlichkeit *von* 0.1.
8. Träger der Normalverteilung ist  $\mathbb{R}$ , d.h. damit wären auch Realisationen  $< 0$  möglich, negative Werte für das Merkmal Nutzungsdauer jedoch nicht möglich.