Aufgabe 1

Ein Versicherungsmakler schloss im vergangenen Jahr insgesamt 1000 Versicherungsverträge ab. Für diese liegen Ihnen die gemeinsamen absoluten Häufigkeiten der Merkmale X: "Provision für den Vertragsabschluss (in Euro)" und Y: "Versicherungsart" vor.

y_j ↓ $(\widetilde{x}_{i-1}; \widetilde{x}_i]$ →	0-150	150-300	300-500	500-1000	$n_{\cdot j}$
Hausrat	250	50	0	0	
Auto	130	250	40	0	
Leben	20	135	90	35	
$n_{i\cdot}$	400	435	130	35	1000

1. Berechnen Sie die **relativen** Randhäufigkeiten $f_{\cdot j}$ des Merkmals Y.
2. Berechnen Sie ein geeignetes Lagemaß für das Merkmal Y "Versicherungsart".
3. Wie groß ist der Anteil der Versicherungen mit einer Provision von über 600 Euro? (**Hinweis**: Unterstellen Sie zur Berechnung Gleichverteilung innerhalb der Klassen.)

Für 7 zufällig ausgewählte Vertragsgespräche hat der Makler nun die Höhe seiner Provision X und die Beratungszeit Z, die bis zu einem Vertragsabschluss nötig war, notiert.

Vertrag i	1	2	3	4	5	6	7
Provision (in Euro) x_i	114	90	145	530	310	160	219
Beratungszeit (in Min.) z_i	30	18	35	42	85	38	53

Es seien $X \sim N(\mu_X, \sigma_X^2)$ bzw. $Z \sim N(\mu_Z, \sigma_Z^2)$ sowie die Stichprobenvarianzen $s^2_{X;7} = 23575$, $s^2_{Z;7} = 458$ und die Stichprobenkovarianz $s_{XZ;7} = 1498$.

4. Berechnen Sie das Stichprobenmittel $\bar{Z}_7$.
5. Testen Sie bei einer Irrtumswahrscheinlichkeit von 10% die Vermutung des Maklers, dass die mittlere Beratungszeit μ_Z über 40 Minuten liegt.
6. Berechnen Sie den Stichprobenkorrelationskoeffizienten r_{XZ}. (**Hinweis:** Falls Sie diese Aufgabe nicht lösen konnten, und nur dann, verwenden Sie im Folgenden $r_{XZ} = 0.635$)
7. Es soll auf Basis der Stichprobe getestet werden, ob der wahre Korrelationskoeffizient ρ_{XZ} von X und Z von 0 verschieden ist. Zu diesem Zweck wird nach bekanntem Schema ein zweiseitiger Hypothesentest für ρ_{XZ} durchgeführt, d.h.

   es wird $H_0: \rho_{XZ} = 0$ gegen $H_1: \rho_{XZ} \neq 0$ getestet.

   Die Prüfgröße T_n, die für dieser Test verwendet wird, ist unter der H_0 t-verteilt mit $n-2$ Freiheitsgraden, d.h. es gilt:

   $$T_n = \frac{r_{XZ} \cdot \sqrt{n-2}}{\sqrt{1-(r_{XZ})^2}} \overset{H_0}{\sim} t(n-2)$$

   Treffen Sie eine Testentscheidung bei einer Irrtumswahrscheinlichkeit von $\alpha = 0.05$.

8. Ihnen liegt folgender R-Output vor:

```
>t.test(x,y,alternative=''less'',mu=0,paired=TRUE,conf.level=0.95)

        Paired t-test
data:  x and y
t = -1.644, df = 6, p-value = 0.07564
alternative hypothesis: true difference in means is less than 0 95
percent confidence interval:
      -Inf 0.2599863
sample estimates: mean of the differences
              -1.428571
```

Geben Sie an, ob die folgenden Aussagen "wahr" oder "falsch" sind (ohne Begründung). Jede **richtige** Antwort wird mit **0.5**, jede **falsche** mit **-0.5** und **keine** Antwort mit **0** Punkten bewertet. **Insgesamt** können in dieser Teilaufgabe **mindestens 0** und **höchstens 2** Punkte erreicht werden.

(a) Es wird ein Mittelwertdifferenzentest für verbundene Stichproben durchgeführt.

(b) Es wird $H_0 : \mu_X - \mu_Y \leq 0$ gegen $H_1 : \mu_X - \mu_Y > 0$ getestet.

(c) Die Nullhypothese kann nicht abgelehnt werden, da $|-1.428571| \not> |-1.644|$.

(d) Die Nullhypothese kann nicht abgelehnt werden, da 0.07564 größer ist als die vorgegebene Irrtumswahrscheinlichkeit.

Aufgabe 2

Die Firma Boreal stellt Kletterschuhe her. Boreal möchte 3 Monate nach Verkaufsstart untersuchen, wie ihr Schuh "Joker" von den Kunden angenommen wurde. Dazu werden aus allen Käufern des Schuhs zufällig 1000 ausgewählt und befragt. Es wurden unter anderem folgende Merkmale betrachtet: Geschlecht des Kunden (Merkmal A) und die Zufriedenheit des Kunden mit dem Produkt (Merkmal B).

1. Die Umfrage ergab, dass von den Kunden 40% männlich sind, 77% der Kunden sind zufrieden. 15% der Kunden sind unzufrieden und weiblich und 5% der Kunden haben sich noch keine Meinung gebildet.

Geschlecht ↓; Zufriedenheit →	zufrieden	unzufrieden	noch keine Meinung	
weiblich		0.15		
männlich				0.40
	0.77		0.05	1.00

   (a) Vervollständigen Sie (in Ihrem Lösungsbogen!) die Sechsfeldertafel der relativen Häufigkeiten, wenn Sie zusätzlich wissen, dass 2/3 aller Kundinnen zufrieden sind.

   (b) Wie viele der befragten Kunden sind insgesamt unzufrieden?

   (c) Berechnen Sie den Anteil der unzufriedenen Kunden unter den Männern.

2. Pro Jahr finden n internationale Kletterwettkämpfe statt. Mit einer Wahrscheinlichkeit von 15% trägt der Gewinner des Wettkampfes einen Schuh von Boreal. Es wird die Zufallsvariable G: "Anzahl der Turniergewinner pro Jahr, die Schuhe von Boreal tragen" betrachtet. Die Statistikabteilung von Boreal folgert, dass die Zufallsvariable G einer Binomialverteilung folgt.

   (a) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass für $n = 25$ mehr als 2 aber weniger als 5 Turniergewinner einen Schuh von Boreal tragen.

   (b) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass für $n = 100$ mehr als 10 aber weniger als 22 Turniergewinner einen Schuh von Boreal tragen.

3. Boreal möchte untersuchen, ob die Marke von Frauen bevorzugt wird. Dazu wird eine repräsentative Stichprobe von 200 Käufern erhoben. Von diesen waren 106 Käufer weiblich. Testen Sie für eine Irrtumswahrscheinlichkeit von 5% die Nullhypothese, dass der Anteilswert der Frauen in der Grundgesamtheit $p_0 \leq 50\%$ ist.

4. Die unvollständige Funktion `conf.int`, soll dass realisierte Konfidenzintervall zum Niveau 1-`alpha` für den unbekannten Mittelwert einer normalverteilten Grundgesamtheit bei unbekannter Varianz der Grundgesamtheit für eine Stichprobe berechnen.

```
conf.int=function(alpha){
    daten=c(-0.2641053,  0.1416962,  1.1310989, -0.4317154, -1.9313087)
    n=length(daten)
    lower=mean(daten)-qt(1-alpha/2, df=?)*sd(daten)/sqrt(n)
    upper=mean(daten)+qt(1-alpha/2, df=?)*sd(daten)/sqrt(n)
    intervall=c(lower,upper)
    return(intervall)
}
```

Geben Sie an, ob die folgenden Aussagen "wahr" oder "falsch" sind (ohne Begründung). Jede **richtige** Antwort wird mit **0.5**, jede **falsche** mit **-0.5** und **keine** Antwort mit **0** Punkten bewertet. **Insgesamt** können in dieser Teilaufgabe **mindestens 0** und **höchstens 2** Punkte erreicht werden.

(a) Um die Funktion zu vervollständigen, muss das Fragezeichen durch `n-1` ersetzt werden.

(b) Der Aufruf `conf.int(1)` führt dazu, dass die beiden Grenzen des Konfidenzintervalls übereinstimmen.

(c) Das von der Funktion `conf.int` zurückgegebene Intervall ist umso breiter, je größer der Wert von `alpha` ist.

(d) Mit einer Wahrscheinlichkeit von 1-`alpha` ist der unbekannte Mittelwert der Grundgesamtheit in dem durch die Funktion berechneten Intervall enthalten.

Aufgabe 3

Im Jahr 2009 gingen weltweit 25 Millionen Koffer an Flughäfen verloren. Am Gepäckschalter eines Flughafens werden innerhalb von 4 Stunden durchschnittlich 32 fehlende Gepäckstücke von Flugpassagieren gemeldet. Die Zufallsvariable G_k: "Anzahl der innerhalb von k Stunden verlorenen Gepäckstücke " sei poissonverteilt.

1. Nennen Sie die Annahmen des Poisson-Prozesses.

2. Mit welcher Wahrscheinlichkeit gehen innerhalb einer halben Stunde höchstens 8 Gepäckstücke verloren?

3. Bestimmen Sie den Modus ggf. die Modi für die Zufallsvariable G_1.

An großen Drehkreuzen erhöht sich das Verlustrisiko. Im Flughafen einer Metropole werden im Durchschnitt pro Stunde sogar 12 verlorene Koffer gemeldet.

4. Dieser Flughafen interessiert sich dafür, mit welcher Wahrscheinlichkeit die Anzahl der fehlenden Koffer in 12 Stunden nicht mehr als 160 und mindestens 120 ist. Geben Sie die Befehle in `R` an, um diese Wahrscheinlichkeit zu berechnen.

5. Ist die gesuchte Wahrscheinlichkeit von Teilaufgabe 4 größer als 90%?
(**Hinweis:** Nehmen Sie zur Berechnung eine geeignete Approximation vor.)

6. Gegeben sei eine Stichprobe $x_i, i = 1, 2, \ldots, n$, gezogen aus einer Poissonverteilung mit Wahrscheinlichkeitsfunktion $f_{Pois}(x; \lambda) = \frac{\lambda^x e^{-\lambda}}{x!}$, für $\lambda > 0$.

   (a) Zeigen Sie, dass die logarithmierte Likelihoodfunktion in Abhängigkeit von λ folgende Form hat:

   $$\ln L(\lambda) = \ln \lambda \sum_{i=1}^{n} x_i - n\lambda - \sum_{i=1}^{n} \ln x_i!$$

   (b) Zeigen Sie, dass $\bar{X}_n$ der ML-Schätzer für λ ist (ohne Berechnung der 2. Ableitung).

7. Die Stichprobenwerte x_i wurden bereits als Vektor `x` in `R` gespeichert. Vervollständigen Sie folgenden `R`-Code, um die logarithmierte Likelihoodfunktion in Abhängigkeit von λ für x_i zu plotten. (**Hinweis:** `factorial(x)`$=x!$)

```
> lambda=seq(0,24,0.1)
> ll=log(lambda)*sum(x)-length(x)*lambda-sum(log(factorial(x)))
...
```

8. Geben Sie an, ob die folgenden Aussagen "wahr" oder "falsch" sind (ohne Begründung). Jede **richtige** Antwort wird mit **0.5**, jede **falsche** mit **-0.5** und **keine** Antwort mit **0** Punkten bewertet. **Insgesamt** können in dieser Teilaufgabe **mindestens 0** und **höchstens 2** Punkte erreicht werden.

(a) ML-Schätzer sind (*MSE*-)konsistent.

(b) ML-Schätzer sind nicht asymptotisch erwartungstreu.

(c) ML-Schätzer sind asymptotisch effizient.

(d) ML-Schätzer sind asymptotisch normalverteilt.

Aufgabe 4

Die stetige Zufallsvariable X besitzt eine Rechteckverteilung auf $[0, 1]$, d.h. die Dichtefunktion besitzt folgende Gestalt:

$$f_X(x) = \begin{cases} 1 & \text{für} \quad 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

1. Geben Sie die Verteilungsfunktion von X an.
2. Zeigen Sie, dass $E[X] = 1/2$ und $Var(X) = 1/12$.
3. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass die Zufallsvariable X Werte zwischen 0.1 und 0.9 annimmt.

Die stetigen Zufallsvariablen X, Y besitzen für $0 \leq x, y \leq 1$ und $\alpha \in [-1, 1]$ die gemeinsame Verteilungsfunktion

$$F_{X,Y}(x, y) = xy + \alpha xy(1 - x)(1 - y)$$

und die gemeinsame Dichtefunktion

$$f_{X,Y}(x, y) = 1 + \alpha(1 - 2x)(1 - 2y).$$

4. Zeigen Sie, dass $F_X(x) = F_{X,Y}(x, 1) = x$ und $F_Y(y) = F_{X,Y}(1, y) = y$ ist.
5. Geben Sie die Randdichtefunktionen von X und Y an. Wie sind demnach die Ränder X und Y verteilt?
6. Zeigen Sie, dass $f_{X|Y}(x|y) = 1 + \alpha(1 - 2x)(1 - 2y)$.
7. Zeigen Sie, dass $E[X|Y]$ linear in y ist.
8. Sie wissen, dass $Cov(X, Y) = \frac{\alpha}{36}$. Zeigen Sie, dass der Korrelationskoeffizient von X und Y gegeben ist durch:
$$\rho(X, Y) = \frac{\alpha}{3}.$$
9. Wie lautet der Wertebereich dieses Korrelationskoeffizienten von X und Y?
10. Für welchen Wert von α sind X und Y unkorreliert? Sind Sie dann auch unabhängig (Begründung)?
11. Gegeben is Ihnen folgender `R`-Code.

```
> pfgm=function(x,y,alpha){x*y+alpha*x*y*(1-x)*(1-y)}
> pfgm(1,1,0)
```

Geben Sie an, ob die folgenden Aussagen "wahr" oder "falsch" sind (ohne Begründung). Jede **richtige** Antwort wird mit **0.5**, jede **falsche** mit **-0.5** und **keine** Antwort mit **0** Punkten bewertet. **Insgesamt** können in dieser Teilaufgabe **mindestens 0** und **höchstens 2** Punkte erreicht werden.

(a) `pfgm` berechnet den Wert der gemeinesamen Verteilungsfunktion von X und Y für gegebenes α.

(b) `pfgm(1,1,0)=0`, da Punktwahrscheinlichkeiten für stetige Zufallsvariablen immer gleich 0 sind.

(c) `pfgm(1,1,0)=0`, da $\alpha = 0$ ist.

(d) `pfgm(1,1,0)=1`, da für die obige Verteilungsfunktion gilt, dass $F_{X,Y}(\infty, \infty) = F_{X,Y}(1, 1) = 1$.

Aufgabe 1

1. $f_{\cdot 1} = 0.3$, $f_{\cdot 2} = 0.42$, $f_{\cdot 3} = 0.28$

2. Modus: $y_{mod} = y_2$

3. $1 - F^*(600) = 1 - \left(F(500) + \frac{0.035}{500}(600 - 500)\right) = 1 - (0.965 + 3.5/500) = 0.028$

4. $\bar{Z}_7 = 43$

5. Mittelwerttest bei unbekannter Varianz
   $H_0 : \mu_Z \leq 40$, $H_A : \mu_Z > 40$

   Kritischer Bereich: $\sqrt{n}\frac{\overline{Z}_n - \mu_0}{S_{\bar{Z};n}} > t_{1-\alpha;n-1}$

   Kritische Schranke: $t_{1-\alpha;n-1} = t_{0.9,6} = 1.440$

   $t = \sqrt{7}\frac{43-40}{\sqrt{458}} = 0.3709 \not> 1.440$

   Da Prüfmaß nicht im kritischen Bereich liegt, kann H_0 mit einer IW $\alpha = 0.1$ nicht abgelehnt werden.

6.
   $$r_{XZ} = \frac{1498}{\sqrt{23575} \cdot \sqrt{458}} = 0.4559$$

7. Kritischer Bereich:
   $$|t_n| = \left| \frac{r_{XZ} \cdot \sqrt{n-2}}{\sqrt{1 - (r_{XZ})^2}} \right| > t_{1-\alpha/2;n-2}$$

   kritische Schranke

   $$t_{0.975;5} = 2.571$$

   $$|t_n| = \left| \frac{0.4559 \cdot \sqrt{7-2}}{\sqrt{1 - (0.4559)^2}} \right| = 1.1454$$

   Da Prüfmaß nicht im kritischen Bereich liegt, kann H_0 mit einer IW $\alpha = 0.05$ nicht abgelehnt werden.

8. wahr, falsch, falsch, wahr

Aufgabe 2

1 (a)

Geschlecht ↓; Zufriedenheit →	zufrieden (B_1)	unzufrieden (B_2)	noch keine Meinung (B_3)	
weiblich (A_1)	0.4	0.15	0.05	0.6
männlich (A_2)	0.37	0.03	0	0.40
	0.77	0.18	0.05	1.00

- $f(B_2) = 1 - f(B_1) - f(B_3) = 1 - 0.77 - 0.05 = 0.18$
- $f(A_2 \cap B_2) = f(B_2) - f(A_1 \cap B_2) = 0.18 - 0.15 = 0.03$
- $f(A_1) = 1 - f(A_2) = 1 - 0.4 = 0.6$
- $f(B_1 \cap A_1) = f(B_1|A_1) \cdot f(A_1) = (2/3) \cdot 0.6 = 0.4$
- $f(B_1 \cap A_2) = f(B_1) - f(B_1 \cap A_1) = 0.77 - 0.4 = 0.37$
- $f(A_1 \cap B_3) = f(A_1) - f(A_1 \cap B_1) - f(A_1 \cap B_2) = 0.6 - 0.4 - 0.15 = 0.05$
- $f(A_2 \cap B_3) = f(B_3) - f(A_1 \cap B_3) = 0.05 - 0.05 = 0$

(b) $n(B_2) = n \cdot f(B_2) = 1000 \cdot 0.18 = 180$

(c) $f(B_2|A_2) = f(B_2 \cap A_2)/f(A_2) = 0.03/0.4 = 0.075$

2 (a) $P(2 < G < 5) = F(4) - F(2) = .6821 - .2537 = 0.4284$

(b) Für $n = 100$ ist Binomialverteilung nicht tabelliert. Approximation durch Normalverteilung, möglich, da $n \cdot p \cdot (1-p) = 100 \cdot 0.15 \cdot 0.85 = 12.75 > 9$

$$P(10 < G < 22) = \Phi\left(\frac{21 + 0.5 - 15}{\sqrt{12.75}}\right) - \Phi\left(\frac{10 + 0.5 - 15}{\sqrt{12.75}}\right) =$$
$$\Phi(1.82) - \Phi(-1.26) = 0.9656 - (1 - 0.8962) = 0.8618$$

3 Der Anteilswert in der Stichprobe beträgt $\hat{p} = 106/200 = 0.53$.
Approximativer Anteilswerttest möglich, da $n \cdot p_0 \cdot (1 - p_0) = 200 \cdot 0.5 \cdot 0.5 = 50 > 9$.
$H_0 : p \leq p_0 = 0.5$ $H_A : p > p_0 = 0.5$

$$T_n = \sqrt{n}\frac{\hat{p} - p_0}{\sqrt{p_0 \cdot (1 - p_0)}} = \sqrt{n} \cdot \frac{0.53 - 0.5}{\sqrt{0.25}} = 0.8485$$

Die Teststatistik ist unter der Nullhypothese Standardnormalverteilt.
Die Kritische Schranke $\lambda_{1-0.05} = \lambda_{0.95} = 1.644$.
Die Nullhypothese kann nicht abgelehnt werden, da $T_n = 0.8485 < 1.644$ ist.

4 wahr, wahr, falsch, falsch

Aufgabe 3

1. Annahmen des Poisson-Prozesses:
   - Die Wahrscheinlichkeit für einen Ereigniseintritt in einem Intervall hängt von dessen Länge ab, nicht von dessen Lage. (Es ist egal, welche Stunde betrachtet wird.)
   - Die Anzahl der Ereignisse in zwei sich nicht überlappenden Intervallen sind voneinander unabhängig. (Die Anzahl der von 9 bis 10 Uhr verlorenen Koffer beeinflusst nicht die Anzahl der von 17 bis 18 Uhr verlorenden Koffer.)
   - Die Wahrscheinlichkeit für mehr als ein Ereignis in einem sehr kurzen Intervall ist vernachlässigbar gering. (Mehr Koffer werden nicht gleichzeitig verloren.)

2. $G_{0.5} \sim Pois(\lambda_{0.5} = 4)$
   $P(G_{0.5} \leq 8) = F_{Pois}(8) = 0.9786$

3. $G_1 \sim Pois(\lambda_1 = 8) \quad , g_{mod} = 7 = 8$

4. $G_{12} \sim Pois(\lambda_{12} = 144)$
   $P(120 \leq G_{12} \leq 160) = P(G_{12} \leq 160) - P(G_{12} \leq 119) = F_{Pois}(160) - F_{Pois}(119)$
   `> ppois(160,144)-ppois(119,144)`

5. $F_{Pois}(x;\lambda) \approx F_{\mathcal{N}}(x;\mu=\lambda,\sigma^2=\lambda) = \Phi(\frac{x+0.5-\lambda}{\sqrt{\lambda}})$, falls $\lambda \geq 10$.
   Hier:$\lambda = 144 \geq 10 \quad \Rightarrow \quad G_{12} \overset{approx}{\sim} \mathcal{N}(144, 144)$
   $F_{Pois}(160) - F_{Pois}(119) = \Phi(\frac{160+0.5-144}{\sqrt{144}}) - \Phi(\frac{119+0.5-144}{\sqrt{144}}) = \Phi(1.38) - \Phi(-2.04) =$
   $= \Phi(1.38) - [1 - \Phi(2.04)] = 0.9162 - [1 - 0.9793] = 0.8955$ (nicht größer als 90%)

6. Likelihoodfunktion: $L(\lambda) = \prod_{i=1}^{n} \frac{\lambda^{x_i} e^{-\lambda}}{x_i!} = \frac{\lambda^{\sum_{i=1}^{n} x_i} e^{-n\lambda}}{\prod_{i=1}^{n} x_i!}$
   Logarithmierte Likelihoodfunktion:
   $\ln L(\lambda) = \ln \lambda \sum_{i=1}^{n} x_i - n\lambda - \ln \prod_{i=1}^{n} x_i! = \ln \lambda \sum_{i=1}^{n} x_i - n\lambda - \sum_{i=1}^{n} \ln x_i!$
   Notwendige Maximumsbedingung: $\frac{\partial \ln L(\lambda)}{\partial \lambda} = \frac{1}{\lambda} \sum_{i=1}^{n} x_i - n \overset{!}{=} 0$
   ML-Schätzer: $\hat{\lambda}_{ML} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n} = \overline{X_n}$

7. `> plot(lambda,ll,'l')`

8. wahr, falsch, wahr, wahr

Aufgabe 4

1. $F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{für} \quad -\infty \leq x < 0 \\ x & \text{für} \quad 0 \leq x \leq 1 \\ 1 & \text{für} \quad x > 1 \end{cases}$.

2.

$$\begin{aligned} E[X] &= \int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x) dx = \int_0^1 x \cdot 1 dx = \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^1 = 1/2. \\ Var(X) &= \int_0^1 x^2 f_X(x) dx - E[X]^2 = \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^1 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 \\ &= \frac{1}{3} - \frac{1}{4} = \frac{1}{12}. \end{aligned}$$

3. $P(0.1 < X < 0.9) = F_X(0.9) - F_X(0.1) = 0.9 - 0.1 = 0.8.$

4. $F_{X,Y}(x,1) = x \cdot 1 + \alpha \cdot x \cdot 1(1-1)(1-x) = x$. Analog $F_{X,Y}(y,1)$.

5. $f_X(x) = \frac{\partial F_X(x)}{\partial x} = \frac{x}{\partial x} = 1$ und ebenso $f_Y(y) = \frac{y}{\partial y} = 1$. Die Ränder sind demnach rechteckverteilt.

6. $f_{X|Y} = \frac{f_{X,Y}(x,y)}{f_Y(y)} = \frac{f_{X,Y}(x,y)}{1} = f_{X,Y}(x,y)$.

7.

$$\begin{aligned} E[X|Y] &= \int_0^1 x f_{X|Y} dx = \int_0^1 x \cdot (1 + \alpha(1-2x)(1-2y)) dx \\ &= \int_0^1 x + x\alpha(1-2x)(1-2y) dx \\ &= \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^1 + \alpha(1-2y)\left(\left[\frac{x^2}{2} - \frac{2x^3}{3}\right]_0^1\right) \\ &= 1/2 + \alpha(1-2y)(1/2 - 2/3) = 1/2 - \alpha/6(1-2y) \end{aligned}$$

   Der Ausdruck in der letzten Zeile ist eine Geradengleichung und somit ist $E[X|Y]$ linear in y.

8. $\rho(X,Y) = \frac{Cov(X,Y)}{\sqrt{Var(X)}\sqrt{Var(Y)}} = \frac{\alpha}{36 \cdot 1/12} = \frac{\alpha}{3}$.

9. Wertebereich $W_\rho = [-1/3; 1/3]$.

10. Für $\alpha = 0$, da dann $\rho(X,Y) = 0$.
    Sie sind dann auch unabhängig, da $F_{X,Y} = x \cdot y = F_X F_Y$ für $\alpha = 0$.

11. wahr, falsch, falsch, wahr